

范畴论与模型范畴

单纯模型、同伦类型论与高阶范畴视角·公开初稿

刘欧 (Liu Ou)

2026 年 8 月 21 日

原创正文以 [CC BY-NC 4.0](#) 许可；第三方文件见 [THIRD_PARTY_NOTICES.md](#)

目录

导读	iv
1. 范畴论基础	1
1.1. 范畴, 函子, 自然变换	2
1.1.1. 范畴	2
1.1.2. 函子	6
1.1.3. 自然变换	8
1.1.4. 函子范畴	10
1.2. 泛性质与极限	11
1.2.1. 极限与完备性	13
1.3. Kan 延拓	18
1.4. 可表函子与预层	20
1.5. 伴随函子	23
1.5.1. 伴随函子定理	25
1.5.2. Kan 延拓的进一步讨论	27
1.5.3. 2-范畴看伴随	29
1.6. 群对象	30
2. 抽象同伦论	32
2.1. 相对范畴与局部化	33
2.1.1. 同伦范畴	33
2.2. 提升性质与弱分解系统	34
2.2.1. 弱分解系统	39
2.3. 模型结构与 Quillen 伴随	40
2.3.1. Quillen 伴随与 Quillen 等价	44
2.4. 同伦、Whitehead 定理与局部化	45
3. 单纯集与模型结构	53
3.1. 从单形范畴到单纯集	53
3.1.1. 单形范畴、面与退化	53

目录

3.1.2. 标准单形、边界与尖角	54
3.2. 从单纯集到空间	55
3.2.1. 几何实现–奇异复形伴随	55
3.2.2. Kan 复形	56
3.2.3. Kan–Quillen 模型结构	57
3.2.4. 与方便拓扑空间的对照	57
3.3. 从单纯集到范畴	58
3.3.1. 普通脉与拟范畴	58
3.3.2. Joyal 模型结构	59
3.4. 单纯范畴与 Bergner 模型结构	61
3.4.1. 单纯集充实范畴	61
3.4.2. 取道路范畴–同伦脉伴随	62
3.5. 与模型无关的总图景	63
4. 类型论的观点: HoTT 与 CaTT	65
4.1. 判断、语境与依值类型	65
4.2. 类型即空间	66
4.2.1. 依值和与依值积	67
4.3. 恒等类型与高阶道路	68
4.4. 等价、宇宙与单叶性	69
4.4.1. 宇宙	69
4.5. 截断层次	70
4.6. 与前文模型的关系和边界	70
4.6.1. 从恒等类型到 CaTT 的定向胞腔	71
4.6.2. 全书路线的回望	73
参考文献	74

导读

这部讲义不把模型范畴当作最终对象, 而把它看成组织和计算局部化的一套坐标. 第一章准备经典范畴论语言; 第二章从相对范畴出发, 说明余纤维化、纤维化、对象替换与同伦怎样让普通同伦范畴变得可计算; 第三、四章再把视野提升到完整的高阶映射资料与内部语言.

全书有两条互相对照的主线:

- $\mathbf{Top}_{\text{cgwh}} \simeq_Q \mathbf{sSet}_{\mathbf{KQ}}$: 从拓扑空间与 Kan 复形描述空间; HoTT 提供相呼应的内部语言视角;
- $\mathbf{sSet}_{\mathbf{J}} \simeq_Q \mathbf{sCat}_{\mathbf{B}}$: 从拟范畴与单纯范畴描述 $(\infty, 1)$ -范畴.

第二行的 Quillen 等价由取道路范畴-同伦脉伴随给出. CaTT 则从定向球状胞腔、粘合语境与高阶相干性公理化更一般的弱 ω -范畴; 它不是上表中的第三个 Quillen 等价, 也不能在不增加高维可逆性条件时直接当作拟范畴的内部语言.

因此, 阅读时应始终区分三个层次: 语法, 具体点集模型, 以及模型所呈现的高阶范畴. 所谓“模型独立”, 指结论最终只依赖第三层; 它并不意味着证明和计算时不再使用前两层.

记号上, 全书统一以 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 表示 $\mathcal{C}$ 中从 x 到 y 的态射对象. 若 $\mathcal{C}$ 已声明为经典 1-范畴、单纯充实范畴、拓扑充实范畴或 ∞ -范畴, 则它依次是集合、单纯集、空间或生象. 当同一处比较多个层级时, 我们以 $\mathcal{C}_0$ 、 $h\mathcal{C}$ 或 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})_{\infty}$ 等下标明确所处的层级, 而不只依赖语境.

分次记号方面, 单纯对象与余单纯对象分别写作 $X_{\bullet}$ 与 $X^{\bullet}$; 链复形与共链复形分别写作 K_{*} 与 K^{*} .

第 1 章

范畴论基础

- 范畴论是一门数学分支, 最开始由 Eilenberg 与 Mac Lane 引入以解释自然变换的“自然性”. 请读者回忆有限维向量空间 V 与其双重对偶 $(V^\vee)^\vee$ 的自然同构 $\text{ev}_V : V \simeq (V^\vee)^\vee$, 在线性代数中, 我们称该同构是“自然的”, 或“典范的”, 以 ev_V 为例, 一般而言, 可以如下来理解自然性

1. 它不依赖于基的选取. 事实上, 可以直接写下公式 $\text{ev}_V(v) = \langle -, v \rangle : V^\vee \rightarrow \mathbb{k}$, 这不需要选取有序基等辅助信息.
2. 它与线性映射的结构是兼容的, 即

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \text{ev}_V \downarrow & & \downarrow \text{ev}_W \\ V^{\vee\vee} & \xrightarrow{T^{\vee\vee}} & W^{\vee\vee} \end{array}$$

- 范畴论的原理是将不同数学分支的数学理论抽象出来, 只保留两种信息: 数学对象, 以及其间态射 (我们所关心的箭头, 或者说是相容的箭头, 例如在我们关心拓扑空间时, 所考虑的箭头即为连续映射, 在关心概形时, 所考虑的箭头往往为概形间的态射). 由此我们可以解释自然或者典范.

在考虑从结构 A 中得到结构 B 的信息时 (或者说从范畴 $\mathcal{C}$ 中得到范畴 $\mathcal{D}$ 的信息, 比方说你考虑带点拓扑空间 (E, e) 的基本群 $\pi_1((E, e))$ 时), 我们就需要用到函子的概念, 上述例子给出了一个函子 $\text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ (例 1.1.3), 更为经典的使用函子的例子是 Brouwer 不动点的证明, 可见定理 1.1.14.

当然, 函子可能具有一些诸如伴随, 保 (余) 极限, 可表等性质具体内容我们将在后文进行讨论.

- 在一切开始之前, 我们还需要进行一个观察: 在讨论群的时候, 我们经常认为同构的群是一致的; 在讨论拓扑空间的时候, 我们经常认为同胚的拓扑空间就是一致的. 所以同

构/同胚是一种在对应结构中所适用的等号 (在对应的代数结构中它往往比严格相等更加有用). 因此在范畴论中, 我们自然而然的提出一个朴素观点: **以同构代替严格等式**.¹

- 为避免集合论枝节, 固定一个 Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$. 本文中的“小”均指 $\mathcal{U}$ -小; Set、Cat 等大范畴默认在一个更大的宇宙中解释.

本章主要参考 [代数学方法卷一, 第二章, 第三章], [wwli 卷二, 第一章], [Kerodon, Chapter 1] 以及 [nLab, 对应词条].

§ 1.1 范畴, 函子, 自然变换

本节来介绍基础的范畴与函子概念

1.1.1 范畴

粗略来说, 范畴就是一些点与其间的箭头所构成的结构, 其具体定义如下:

定义 1.1.1. ((1-) 范畴) 一个 (1-) 范畴 $\mathcal{C}$ 系指以下信息:

1. 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$, 其内元素称作 $\mathcal{C}$ 的**对象**.
2. 对任意 $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 有一个集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 其元素称为从 x 到 y 的**态射**.
3. 对任意 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 有一个元素

$$\text{id}_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x),$$

称为 x 到自身的**恒等态射**.

4. 对任意 $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 有一个映射

$$\begin{aligned} \circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z), \\ (f, g) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

称为**复合**,

并且满足以下两条公理

- (**单位律**) 对任意 $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 有

$$\text{id}_y \circ f = f = f \circ \text{id}_x.$$

¹类型论中需要区分元语言里的判断相同 (或定义相同) 与恒等类型中的项; 后者本身还能保留更高信息. 参见第 4 章.

- (结合律) 对任意 $x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)$, 有

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

故可记之为 $h \circ g \circ f$, 而不产生歧义.

注记 1.1.2. 我们常常使用以下记号:

- 如果 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 我们简记为 $x \in \mathcal{C}$.
- 如果 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 我们也记 $f: x \rightarrow y$, 或者 $x \xrightarrow{f} y$.
- $\mathcal{C}$ 中所有态射构成的类常记为 $\text{Mor}(\mathcal{C})$. 取来源与目标给出一对典范映射

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} \text{Ob}(\mathcal{C})$$

其中 s 与 t 分别表示态射的**来源**和**目标**.

- 图表加箭头是讨论范畴的方便语言. 其中最常用的是**交换图表**的概念, “交换”指态射合成后的结果相等, 就是说图表中链接同一始末点组的道路给出相同的作用效果, 例如以下二则图表

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ u \downarrow & & \downarrow g \\ w & \xrightarrow{v} & z \end{array}$$

的交换性分别再说 $g \circ f = h$ 以及 $v \circ u = g \circ f$.²

事实上, 在这一步我们没有做什么不平凡的举动, 为方便读者理解, 我们给出以下例子

例 1.1.3. 1. 当我们关心某一类数学对象的全体时, 可以取它们构成的范畴, 此时态射即为数学结构所容许的映射, 或者说保持数学结构的映射, 例如

- 所有 $\mathcal{U}$ -小集合及其间映射构成范畴 Set .
- 所有 $\mathcal{U}$ -小群及其间群同态构成的范畴 Grp .
- 域 $\mathbb{k}$ 上全体向量空间及其间线性映射所构成的范畴 $\text{Vect}(\mathbb{k})$.
- 拓扑空间及其间连续映射构成范畴 Top .
- 所有光滑流形及其间光滑映射构成范畴 Mani .
- 可测空间及其间可测函数构成范畴 Meas , 但是这一空间事实上缺少了很多信息 (比如说零测的选取), 所以难堪大用.
- R -模上的链复形及其间链映射构成范畴 Ch_R .

²事实上在高阶范畴论中, 图表交换是信息而非性质.

- 全体概形及其间态射构成范畴 Sch .
- 2. 我们也可以将集合 S 升级为对应的范畴, 记作 $\text{Disc}(S)$, 其对象集为 S 而态射只有恒等态射.
- 3. (子范畴) 有时候我们会在原范畴 $\mathcal{C}$ 中取出一部分对象 ($\text{Ob}(\mathcal{C}') \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$) 与态射 (当然取出的态射 f 需要保证 $s(f), t(f) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$) 所构成新范畴, 并且其它一切性质 (即恒等态射, 结合律等) 都继承自原范畴, 我们把这一新结构称为 $\mathcal{C}$ 的子范畴. 当取出的态射正好为取出对象之间全体态射时, 我们把子范畴称为全 (或者满) 子范畴, 后面将看到这作为嵌入函子确实是全的.
- 4. 取 $\mathbb{k}$ 上全体有限维向量空间所构成的范畴 $\text{Vect}_f(\mathbb{k})$, 容易发现其为 $\text{Vect}(\mathbb{k})$ 的全子范畴.
- 5. 带点拓扑空间构成的范畴 Top_* , 其对象为所有的 (E, e) , 其中 $e \in E$ 称为基点. 从 (X, x) 到 (Y, y) 的态射为保持基点的连续映射, 即使得 $f(x) = y$ 的连续映射 $f: X \rightarrow Y$.
- 6. 全体 Abel 群构成的范畴 Ab , 它是 Grp 的全子范畴.
- 7. 我们可以给出全体小范畴所构成的范畴 Cat . 仅仅把它视为 1-范畴会忽略自然变换所给出的 2-态射; 在本章后半部分, 我们还会从 2-范畴的角度看待伴随.

在谈论函子之前, 请容许我们对于范畴进行多一点点的观察, 就是考虑范畴内态射的性质. 显然的, 我们可以将单满性以及同构移入范畴之中.

定义 1.1.4. 设 x, y 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象, $f: x \rightarrow y$ 为态射. 则

- 称 f 为单态射, 如果对任意 $Z \in \mathcal{C}$ 以及一对态射 $g, h: Z \rightarrow x$ 都有 $fg = fh \Leftrightarrow g = h$ (左消去律);
- 称 f 为满态射, 如果对任意 $Z \in \mathcal{C}$ 以及一对态射 $g, h: y \rightarrow Z$ 都有 $gf = hf \Leftrightarrow g = h$ (右消去律);

如果存在 g 使得 $gf = \text{id}_x$ 则称 f 左可逆而 g 为其左逆; 类似地, $fg = \text{id}_y$ 则称 f 右可逆而 g 为其右逆; 左可逆又右可逆的态射称为同构.

定义 1.1.5. (子对象) 在一般的范畴中, 称指向 X 的单态射 $U \rightarrow X$ 的同构类为 X 的子对象, 其中单态射的同构是指形如

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \uparrow \scriptstyle \simeq & \searrow & \\ & & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \tilde{U} & & \end{array}$$

的交换图. X 的子对象构成偏序集 $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$.

左可逆态射必为单态射, 右可逆态射必为满态射; 一个态射是同构当且仅当它同时具有左逆与右逆. 在一般范畴中, 单且满并不蕴含同构: 例如交换环范畴 $\mathbf{CRing}$ 中的包含态射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 既单又满, 却不是同构. 而后, 我们就可以给出一个新的例子

定义 1.1.6. (群胚) 若一个范畴 $\mathcal{C}$ 的所有态射均可逆, 则称其为**群胚**, 群胚所构成的范畴记为 $\mathbf{Groupoid}$.

例 1.1.7. 群就是只有一个对象, 且态射为群元素的群胚, 将群 G 视为群胚的过程叫做群的胚化, 记为 $\underline{G}$.

群胚可以看作集合的范畴化推广; 从另一个方向看, 它也是允许多个对象的群. 事实上, 群胚是更贴合于拓扑空间结构的 1-范畴, 我们可以很自然地拓扑空间中取出群胚 (当然, 只是从同伦的角度来看, 这是从拓扑空间造出 1-范畴的典范手段), 称为基本群胚.

例 1.1.8. 对于拓扑空间 E , 其**基本群胚** $\Pi_1(E)$ 定义为如下范畴:

- $\text{Ob}(\Pi_1(E)) = E$.
- $\text{Hom}_{\Pi_1(E)}(x_0, x_1) =$ 从 x_0 到 x_1 的道路类.
- $\text{id}_{x_0} = [c_{x_0}]$ 其中右侧表示在 x_0 处的常值道路.

基本群胚只记录道路的同伦类, 因而会舍去道路之间更高阶的同伦信息. 这一现象提示我们: 用 1-范畴描述同伦论时, 通常还需要局部化、模型结构等额外工具来保留正确的同伦信息.

此外, 范畴具有着对偶构造 (不过是把态射倒置)³, 即反范畴, 其具体定义如下:

定义 1.1.9. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, 定义其反范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 如下:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, 对于 $X \in \mathcal{C}$, 记其在反范畴中的对应为 X^{op} .
- 对于任意对象 X, Y , $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X^{\text{op}}, Y^{\text{op}}) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
- 反范畴中的态射合成 $\circ$ 定义为 $\mathcal{C}$ 中的反向合成.
- 恒等映射同 $\mathcal{C}$.

后文我们将看到对偶构造 $(-)^{\text{op}}$ 构成函子.

³在高阶范畴上, 会出现不止一种对偶结构, 即不仅仅可倒置 1-态射, 还可以倒置高阶态射.

1.1.2 函子

现在我们来讲一下函子, 粗略地说, 函子也是一种态射, 它不过是保持范畴结构的态射而已, 由于范畴具有对象集与态射集两种结构, 因此函子也应当从这两种结构上考虑, 此外函子并不需要带有更多的信息, 只需要保证范畴公理 (即定义 1.1.1) 的照常运作即可.

定义 1.1.10. (函子) 设 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ 为范畴, 一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 系指以下信息:

1. 对象集之间的映射 $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$.
2. 态射之间的映射 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$.

需要满足以下公理:

- 对每个 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 都有

$$F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}.$$

- 它将 $\mathcal{C}$ 中如下交换图映为 $\mathcal{D}$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ & \searrow F(g) \circ F(f) & \downarrow F(g) \\ & & F(z) \end{array}$$

而后我们给出一些例子以资体会

例 1.1.11. 1. 每个范畴 $\mathcal{C}$ 都有到自身的恒等函子, 记为 $\text{id}_{\mathcal{C}}$.

2. 前文所提到的子范畴 $\mathcal{C}'$ 到原范畴 $\mathcal{C}$ 的含入可以构成函子, 称其为包含函子, 记作 $\iota : \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$.

3. 对于范畴的范畴 Cat 可以定义对偶构造 $(-)^{\text{op}} : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$, 它将范畴 $\mathcal{C}$ 映为其反范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$, 范畴间的函子映为反范畴间的对应函子. 不难发现在 1-范畴语境下 $((-)^{\text{op}})^{\text{op}} = \text{id}_{\text{Cat}}$.

4. 考虑域 $\mathbb{k}$ 上的向量空间范畴 $\text{Vect}(\mathbb{k})$, 回忆其对偶空间定义为

$$V^{\vee} := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k}) = \{\mathbb{k}\text{-线性映射 } V \rightarrow \mathbb{k}\}$$

对于任一线性映射 $f : V_1 \rightarrow V_2$, 它通过以下图表的方式诱导对偶空间的反向线性映射 (即转置映射, 其作用效果为复合上 f , 容易发现在有限维取基用矩阵表出后即为矩阵转置)

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f^{\vee}(a)=a \circ f} & \mathbb{k} \\ f \downarrow & \nearrow a \in & \uparrow f^{\vee} \\ V_2 & & V_1^{\vee} = \text{Hom}_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}(V_1, \mathbb{k}) \end{array}$$

具体写出即为

$$f^\vee : V_2^\vee = \text{Hom}_{\text{Vect}(\mathbb{k})}(V_2, \mathbb{k}) \rightarrow V_1^\vee = \text{Hom}_{\text{Vect}(\mathbb{k})}(V_1, \mathbb{k}),$$

$$[a : V_2 \rightarrow \mathbb{k}] \mapsto a \circ f$$

易见 $D : V \mapsto V^\vee, f \mapsto f^\vee$ 定义了函子 $D : \text{Vect}(\mathbb{k})^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{k})$, 我们可以再取一次对偶并且复合后得到函子 $DD^{\text{op}} : \text{Vect}(\mathbb{k}) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{k})$. 分别称 D 和 DD^{op} 为对偶和双对偶函子.

5. 对于带点拓扑空间 $(E, e) \in \text{Top}_*$, 指定其基本群 $\pi_1(E, e)$ 就给出函子 $\text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$, 若指定大于等于 2 的高阶同伦群则给出函子 $\text{Top}_* \rightarrow \text{Ab}$, 此外, 空间的 (某种) 同调群 $X \mapsto H_n(X; \mathbb{Z})$ 给出一族函子 $H_n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$. 而上同调群给出函子 $H^n : \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$.
6. 从拓扑空间到其基本群胚给出函子 $\Pi : \text{Top} \rightarrow \text{Groupoid}$, 群的胚化给出函子 $\underline{(-)} : \text{Grp} \rightarrow \text{Groupoid}$.

由于函子作用于两个层面, 并且回忆到我们先前所提到过的范畴论的哲学原理, 我们可以给出函子作为映射的部分性质, 由于范畴论以同构代替严格等式, 因此在对象上我们不苟求严格相等, 而在态射上, 集合的同构就只有双射, 因此我们分为单满性进行考虑.

定义 1.1.12. 对于函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$,

1. 称 F 为**本质满**的, 若 $\mathcal{C}'$ 中的任一对象都同构于某个 $F(x)$, 其中 $x \in \mathcal{C}$;
2. 称 F 是**忠实**的, 若对所有 $x, y \in \mathcal{C}$, 映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Fx, Fy)$$

均为单射;

3. 若上述映射对所有 $x, y \in \mathcal{C}$ 均为满射, 则称 F 是**全**的.

练习 1.1.13. 观察上述例子, 说明哪些函子是本质满的, 哪些函子是全的, 哪些函子是忠实的.

到函子这一层就已经可以进行一些粗浅的应用, 典型案例就是 Brouwer 不动点定理的证明.

定理 1.1.14. (Brouwer 不动点定理) 设 $n \geq 1$, 且 D^n 是 Euclid 空间中的单位闭球, 则对任意连续映射 $f : D^n \rightarrow D^n$, 存在 $x \in D^n$, 使得 $f(x) = x$.

证明. 如不然, 记 S^{n-1} 为单位球面, 则映射

$$\pi : D^n \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \text{射线 } f(x) \rightarrow x \text{ 与 } S^{n-1} \text{ 的交点}$$

与包含映射 $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ 之复合为恒等映射. 于是它对应的 $n-1$ 阶约化同调群映射

$$\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(D^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$$

之复合是恒等映射. 但 $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$, $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, 矛盾. $\square$

当然你也可以使用基本群进行证明维数为 2 的情况, 因为你可以根据直观显然得到 $\pi_1(D^2) = 0$ 而 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

1.1.3 自然变换

现在我们已经给出了函子的定义, 那么我们其实可以观察到在引言中我们所说的线性空间与双对偶空间的交换图表能够改写如下

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ DD^{\text{op}}V & \xrightarrow{DD^{\text{op}}(f)} & DD^{\text{op}}W \end{array}$$

可以看出这自然地勾连了函子 $\text{id}_{\text{Vect}_f(\mathbb{k})}$ 以及双对偶函子 DD^{op} . 本节中我们来仔细探讨这一性质, 不难发现, 这一性质恰好可以视为函子间的态射 (保持了函子的结构), 因此自然性也称为函子性.

定义 1.1.15. (自然变换, 或函子间的态射) 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, 从 F 到 G 的自然变换 α 通常记为

$$\alpha: F \Rightarrow G,$$

由以下信息构成:

- 对每个 $x \in \mathcal{C}$, 都有 $\mathcal{D}$ 中态射 $\alpha_x: F(x) \rightarrow G(x)$.

满足以下相容性 (自然性) 条件: 对于 $\mathcal{C}$ 中任一态射 $f: x \rightarrow y$, 有交换图

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(f)} & G(y) \end{array}$$

可以以 2-胞腔的形式写为

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \Downarrow \alpha \\ \Downarrow \end{array} & \mathcal{D} \\ & G & \end{array}$$

在严格 2-范畴 $\mathbf{Cat}$ 中, 自然变换正是函子之间的 2-态射; 它可以作横合成与纵合成. 在同伦论的语境中, 这一图景也解释了自然变换为何常被类比为函子之间的同伦.

有了自然变换, 接下来所探讨的问题就是何时可以取逆, 由其定义可知如果我们能在 $\mathcal{D}$ 中对于 $F(x) \rightarrow G(x)$ 逐点取逆, 那确实就可以逆过来. 事实上, 这也是一种表达 “两个函子相等” 这一想法的正确概念, 在范畴论中, 我们称其为自然同构.

定义 1.1.16. (自然同构) 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, 则 F 到 G 的自然同构是指一个自然变换 $\alpha: F \Rightarrow G$, 使得

- 对于任意 $x \in \mathcal{C}$, 都有 $\alpha_x: F(x) \rightarrow G(x)$ 为 $\mathcal{D}$ 中的同构.

换言之 α 可以逐点的取逆. 此时也称 F 与 G 自然同构.

不难发现每个函子都自然同构于其自身.

例 1.1.17. 取范畴 $\mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})$, 使用基本的线性代数知识我们可以知道 $\mathrm{ev}_V: V \rightarrow (V^\vee)^\vee$ 为同构, 因此 DD^{op} 与 $\mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})}$ 为自然同构.

现在进一步讨论两个范畴何时承载相同的范畴论信息. 严格相等通常过强, 合适的概念是范畴等价.

定义 1.1.18. (范畴等价) 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子. 称 F 为**范畴等价**, 如果:

- 存在函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, 以及函子之间的自然同构

$$G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \quad F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}.$$

此时, 也称范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ **等价**, 称 F, G 互为 **逆函子**.

注记 1.1.19. 范畴等价在相应的 Hom -集之间给出双射, 因而等价的范畴具有相同的范畴论性质. 例如, 练习 1.1.22 说明有限维线性映射可以完全用矩阵来描述.

例 1.1.20. 1. 例 1.1.17 在反范畴中的构造给出 $\mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_f(\mathbb{k})^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{op}}D$ 这说明对偶函子 D 是范畴等价.

2. (代数-几何对偶) 素谱构造给出范畴等价

$$\mathrm{Spec}: \mathbf{CRing}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{AffSch}.$$

其拟逆由仿射概形取整体截面环得到. 因而仿射概形的范畴论信息可以等价地用交换环来描述.

下面给出判定函子是否为范畴等价的常用准则.

定理 1.1.21. 对于函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 以下叙述等价:

1. F 为范畴等价,

2. F 为全忠实本质满函子.

概要. $(\Rightarrow)$ 若 F 为范畴等价, 则存在 G 使得 $GF \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}}$ 且 $FG \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$. 对任意 $z \in \mathcal{D}$, 有 $F(G(z)) \simeq z$, 故 F 本质满. 再利用上述两个自然同构, 可知 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, Fy)$ 为双射, 因而 F 全忠实.

$(\Leftarrow)$ 设 F 全忠实且本质满. 对每个 $d \in \mathcal{D}$, 选取对象 $Gd \in \mathcal{C}$ 以及同构

$$\varepsilon_d: F(Gd) \xrightarrow{\sim} d.$$

对态射 $a: d \rightarrow d'$, 由 F 的全忠实性, 存在唯一的 $Ga: Gd \rightarrow Gd'$ 满足

$$F(Ga) = \varepsilon_{d'}^{-1} a \varepsilon_d.$$

唯一性保证 G 保持恒等态射与复合, 因而定义了函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$; 同时 $(\varepsilon_d)_d$ 给出自然同构 $FG \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$. 再令 $\eta_x: x \rightarrow G(Fx)$ 为满忠实双射下对应于 ε_{Fx}^{-1} 的唯一态射, 即

$$F(\eta_x) = \varepsilon_{Fx}^{-1}.$$

则 η 是自然同构 $\text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$. 因此 F 是范畴等价. □

练习 1.1.22. 选定矩阵所构成的范畴 Mat , 其对象为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\text{Hom}_{\text{Mat}}(n, m) := M_{m \times n}(\mathbb{k})$, 态射合成定义为矩阵乘法. 试证明

$$F: \text{Mat} \rightarrow \text{Vect}_f(\mathbb{k})$$

$$n \mapsto \mathbb{k}^{\oplus n}$$

$$\text{Hom}_{\text{Mat}}(n, m) \ni A \mapsto FA: \mathbb{k}^{\oplus n} \xrightarrow{v \mapsto Av} \mathbb{k}^{\oplus m}$$

为范畴等价, 这无非是有限维情况下线性映射的矩阵表达, 说明在有限维情况下矩阵包含了线性映射的全体信息.

1.1.4 函子范畴

考虑 2-胞腔

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \end{array} \xrightarrow{\text{旋转 } 90^\circ} \begin{array}{c} F \\ \downarrow \theta \\ G \end{array}$$

我们可以将纸面旋转九十度 (竖起来), 发现我们可以将函子视为点 (对象), 自然变换视为态射. 因此得到

定义 1.1.23. (函子范畴) 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 为范畴, 定义函子范畴 $\text{Fun}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$: 其对象是从 $\mathcal{C}_1$ 到 $\mathcal{C}_2$ 的函子, 态射是自然变换, 态射的合成取纵合成. 当 $\mathcal{C}_1$ 为小范畴时, 也常记作 $\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1}$.

练习 1.1.24. 当 $\mathcal{I}$ 取离散范畴时, $\text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \simeq \prod_{i \in I} \mathcal{C}$

§ 1.2 泛性质与极限

本节来讲述范畴论的核心概念之一, 即泛性质. 通过泛性质构造出的数学对象叫做万有构造. 对于我们想要构造的数学对象 X , 我们所要求 X 具有的泛性质可以是以下两者之一 (其实就是 Y 到 X 和 X 到 Y 的区别):

- 对任何对象 Y , 为了给出 Y 到 X 的态射, 只需给出某种与 Y 有关的信息而不提及 X .
- 对任何对象 Y , 为了给出 X 到 Y 的态射, 只需给出某种与 Y 有关的信息而不提及 X .

此处, “泛” 指的是你需要对于 (所考虑的) 全体数学对象 Y 都满足, 或者另一方面, “泛” 的意思其实是最, 也就是你能够造出的满足条件的最 “大”/“小” 的对象, 当然这种构造方式并不总是良定义的. 可能会有两个问题:

- 存在性: 给定一种泛性质, 可能并没有对象 X 满足该泛性质.
- 唯一性: 可能有多个 X 满足同一个泛性质.

由于范畴论的基本原理, 对于唯一性我们事实上只需要让这些多个 X 在同构意义下是唯一的即可. 因此我们需要一种能够去描述在同构意义下唯一的工具, 并且它在我们给出某种与 Y 有关而不提及 X 的信息时可以给出从 Y 到 X (或从 X 到 Y) 的态射. 这套工具我们称为始终对象, 而我们可以将 Y 有关的信息写为函子, 而在对应逗号范畴中以始终对象的手段给出我们所需的万有构造. 当然, 始终对象本身也是一种万有构造.

定义 1.2.1. (始对象, 终对象, 零对象) 范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 x 为**始对象**, 如果对所有对象 y 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 恰有一个元素. 类似地, 称 x 为**终对象**, 如果对所有对象 y , 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$ 恰有一个元素. 若 x 既是始对象又是终对象, 则称 x 为**零对象**. 对于带有零对象的范畴, 称为**带点范畴**.

注记 1.2.2. 当我们把 Hom 由集合变为 “空间” 时 (准确来说是我们考虑 ∞ -范畴时, 此时 Hom 为 ∞ -群胚, 或称生象), 始对象和终对象的刻画应当为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 同伦等价于单点空间 (或称可缩).

我们可以注意到我们其实没有给出任何关于始/终对象的具体解释, 而只是描述出接下来我们解释为何前文说使用始终对象来描述在同构意义下唯一.

命题 1.2.3. 设 x, x' 为 $\mathcal{C}$ 中的始对象, 则存在唯一的同构 $x \xrightarrow{\sim} x'$, 同样性质对于终对象也成立.

证明. 只需证明始对象的情况即可, 由于 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x', x)$ 都只有一个元素, 分别记为 f, g , 不难发现 $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ 由始对象定义即知其为 id_x , 同理知 $f \circ g = \text{id}_{x'}$. $\square$

定义 1.2.4. (零态射) 设 $\mathcal{C}$ 中有零对象, 记为 0 . 对任意 $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 定义零态射 $0 : x \rightarrow y$ 为

$$x \rightarrow 0 \rightarrow y$$

的合成.

始对象和终对象在日常生活中应当是司空见惯的, 以下给出几个例子.

- 例 1.2.5.**
1. 在集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中, $\emptyset$ 是始对象而单点集 $\{*\}$ 是终对象.
 2. 拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}$ 中, 空空间 $\emptyset$ 为始对象而单点空间 $\{*\}$ 为终对象.
 3. 在环范畴中, 整数环 $\mathbb{Z}$ 是始对象, 因此在交换环范畴中也是如此, 进而在概形范畴 $\mathbf{Sch}$ 中, $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 是终对象. 而环范畴的终对象是零环.
 4. 在域 $\mathbb{k}$ 的向量空间范畴 $\mathbf{Vect}(\mathbb{k})$ 中, 零对象即为零向量空间.
 5. 在群范畴 $\mathbf{Grp}$ 中, 零对象为平凡群.

一般而言, 在不造成歧义的情况下, 将始对象记为 $\emptyset$ 而终对象记为 $*$. 逗号范畴语言可以辅助我们去讨论泛性质 (但它并非万能):

定义 1.2.6. (逗号范畴) 对于函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xleftarrow{g} \mathcal{E}$. 则其逗号范畴是如下定义的范畴:

- 对象: 形如 (x, y, a) 的三元组, 其中 $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{E}$, $a \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f(x), g(y))$.
- 从 (x, y, a) 到 (x', y', a') 的态射是二元组 (c, d) , 其中 $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$, $d \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(y, y')$, 使得 $\mathcal{D}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{a} & g(y) \\ \downarrow f(c) & & \downarrow g(d) \\ f(x') & \xrightarrow{a'} & g(y') \end{array}$$

交换.

我们将这个范畴记为

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \begin{array}{c} \vec{\times} \\ f, \mathcal{D}, g \end{array} \mathcal{E} \quad \text{或} \quad \mathcal{C} \begin{array}{c} \vec{\times} \\ \mathcal{D} \end{array} \mathcal{E} \\ \text{或} \quad (f \downarrow g) \quad \text{或} \quad (f / g). \end{array}$$

一般而言, 泛性质可以描述为某种切片范畴的始/终对象.

- 例 1.2.7.**
- 模的张量积: 取 $R \in \mathbf{CRing}$ 为交换环, 考虑 R -模构成的范畴 $R\text{-Mod}$, 对于 $M, N \in R\text{-Mod}$ 我们现在想将 M 和 N 的元素形式地“配对”, 这可以理解为映向某个 R -模 (由于此时为交换环) A 的平衡积 $B: M \times N \rightarrow A$. 所谓平衡积是满足以下条件的映射: 对于 $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ 以及 $r \in R$

- (作为群同态) $B(x+x', y) = B(x, y) + B(x', y)$, $B(x, y+y') = B(x, y) + B(x, y')$.
- (与 R -模结构相容) $B(xr, y) = B(x, ry)$.

从 $M \times N$ 全体平衡积构成的范畴即为 $\text{Bal}(M, N, *)$, 不难发现, 平衡积总是会减少 M 和 N 中的信息, 我们想尽可能保留这些信息, 相当于说选取一个最“大”的平衡积, 使得它不会商掉多余的信息. 这相当于说考虑 $\text{Bal}(M, N, *)$ 的始对象.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ & \searrow & \downarrow \exists! \\ & & A \end{array}$$

把 $M \otimes N$ 称为 M 和 N 的张量积.

1.2.1 极限与完备性

本节来讲述在范畴论中最为常见也是最为基本的万有构造——(余) 极限.

我们将使用很多种方式 (可能会配上相应图表) 来理解 (余) 极限这一概念, 粗略来说, (余) 极限就是满足一些态射条件的最小 (大) 的对象⁴. 我们先讲解 [代数学方法卷一, § 2.7 极限] 一节中关于极限的定义.

定义 1.2.8. 令 $I, \mathcal{C}$ 为范畴. 定义对角函子 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^I := \text{Fun}(I, \mathcal{C})$ 如下: 它将任一 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 映为常值函子

$$\Delta(X): I \rightarrow \mathcal{C} \begin{cases} \forall i \in \text{Ob}(I), & i \mapsto X \\ \forall (i \rightarrow j) \in \text{Mor}(I), & (i \rightarrow j) \mapsto [\text{id}_X: X \rightarrow X]. \end{cases}$$

给定态射 $f: X \rightarrow Y$, 范畴 $\mathcal{C}^I$ 中 $\Delta(f): \Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$ 的定义是显然的: 它对每个 $i \in \text{Ob}(I)$ 指定 $f: X \rightarrow Y$.

给定函子 $\alpha: I \rightarrow \mathcal{C}$, 也就是函子范畴 $\mathcal{C}^I$ 中的一个对象. 令 $*$ 为终范畴, 并以

$$j_\alpha: * \rightarrow \mathcal{C}^I$$

表示选出对象 α 的函子.

定义 1.2.9. (锥、余锥与 (余) 极限) • 逗号范畴 $(j_\alpha \downarrow \Delta)$ 称为 α 的余锥范畴. 它的对象是二元组 (X, λ) , 其中 $X \in \mathcal{C}$ 且 $\lambda: \alpha \Rightarrow \Delta(X)$; 从 (X, λ) 到 (Y, μ) 的态射是满足

$$\Delta(f) \circ \lambda = \mu$$

的态射 $f: X \rightarrow Y$. 该范畴的始对象若存在, 其顶点记为 $\varinjlim_I \alpha$, 称为 α 的余极限.

⁴如果我们将 $A \rightarrow B$ 称为 A 比 B 大.

- 逗号范畴 $(\Delta \downarrow j_\alpha)$ 称为 α 的**锥范畴**. 它的对象是二元组 (X, λ) , 其中 $\lambda: \Delta(X) \Rightarrow \alpha$; 从 (X, λ) 到 (Y, μ) 的态射是满足

$$\mu \circ \Delta(f) = \lambda$$

的态射 $f: X \rightarrow Y$. 该范畴的终对象若存在, 其顶点记为 $\varprojlim_I \alpha$, 称为 α 的**极限**.

命题 1.2.3 说明 (余) 极限若存在则 (在同构意义下) 唯一.

引理 1.2.10. (函子性) 若 I 为小范畴, 且 I -形余极限 (或极限) 在 $\mathcal{C}$ 中存在, 则它们给出函子

$$\varinjlim_I: \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{或} \quad \varprojlim_I: \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}.$$

证明. 留作习题. □

例 1.2.11. (拉回与推出) 给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: B \rightarrow D$ 与 $g: C \rightarrow D$. 若存在对象 $B \times_D C$ 及交换方块

$$\begin{array}{ccc} B \times_D C & \xrightarrow{p_B} & B \\ p_C \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & D, \end{array}$$

使得对任意满足 $fu = gv$ 的一对态射 $u: X \rightarrow B, v: X \rightarrow C$, 都存在唯一的 $h: X \rightarrow B \times_D C$ 使 $p_B h = u$ 且 $p_C h = v$, 则称该方块为**拉回方块**, 称 $B \times_D C$ 为 f 与 g 的拉回.

在 Set 中, 拉回可以具体写成

$$B \times_D C = \{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}.$$

对偶地, 给定 $u: A \rightarrow B$ 与 $v: A \rightarrow C$, 若交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \downarrow & \lrcorner & \downarrow j_B \\ C & \xrightarrow{j_C} & B \sqcup_A C \end{array}$$

满足对偶的万有性质, 则称它为**推出方块**, 称 $B \sqcup_A C$ 为 u 与 v 的推出. 在 Set 中, 它是余积 $B \sqcup C$ 对关系 $u(a) \sim v(a)$ 取商所得的集合.

练习 1.2.12. 请直接验证上述 Set 中的两个构造分别满足拉回与推出的万有性质.

接下来我们讲述极限的第二种刻画方式: 令 $I^\triangleleft$ 和 $I^\triangleright$ 为在 I 中形式地添加一个始对象或终对象, 即将图表变为

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \swarrow & & \searrow \\ i & \xrightarrow{\quad} & j \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\quad} & j \\ \searrow & & \swarrow \\ & * & \end{array}$$

此时有显然的函子 $I \rightarrow I^\Delta$ 和 $I \rightarrow I^\triangleright$. 此时考虑拉回 (相当于限制态射对于 α 一点取逆)

$$\begin{array}{ccc} \text{Fun}_\alpha(I^\Delta, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \text{Fun}(I^\Delta, \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{限制} \\ * & \xrightarrow{\alpha} & \text{Fun}(I, \mathcal{C}) \end{array}$$

我们就得到 $\text{Fun}_\alpha(I^\Delta, \mathcal{C})$ 称其为锥, 此时其中对象可以表为 (不难发现限制在 I 上为 α).

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha(i) & \xrightarrow{\alpha(i \rightarrow j)} & \alpha(j) \end{array}$$

因此考虑其中终对象即为极限. 反过来, 考虑 $\text{Fun}_\alpha(I^\triangleright, \mathcal{C})$ 其始对象就是余极限.

现在, 我们在集合范畴 **Set** 中刻画极限, 这一过程相当于在求解规划问题⁵

$$\begin{array}{l} \min \quad \varprojlim \alpha \in \mathcal{C} \\ \text{s. t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varprojlim \alpha \rightarrow \alpha(i), \quad \forall i \in \text{Ob}(I) \\ \alpha(i) \xrightarrow{\alpha(i \rightarrow j)} \alpha(j), \quad \forall (i \rightarrow j) \in \text{Mor}(I) \\ \text{上述全体箭头均交换} \end{array} \right. \end{array}$$

我们可以分成两步来求解该规划问题, 首先解决 $\varprojlim \alpha \rightarrow \alpha(i)$, 这无非是在说将 I 先视为离散范畴进行求解, 直接得到结果为积 $\prod_I \alpha(i)$. 而后不断加入条件, 不难发现, 在集合范畴中, 增加这些条件相当于得到以下集合

$$\left\{ (x_i)_{i \in \text{Ob}(I)} : \forall (i \xrightarrow{\sigma} j) \in \text{Hom}_I(i, j), \alpha(\sigma)(x_i) = x_j \right\}.$$

而该操作对于一般具体的范畴也是使用的, 这估计就是古老文献中, 将极限称为“普适问题的解”的原因所在.

现在我们来刻画余极限, 这与极限是对偶的.

$$\begin{array}{l} \max \quad \varinjlim \alpha \in \mathcal{C} \\ \text{s. t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(i) \rightarrow \varinjlim \alpha, \quad \forall i \in \text{Ob}(I) \\ \alpha(i) \xrightarrow{\alpha(i \rightarrow j)} \alpha(j), \quad \forall (i \rightarrow j) \in \text{Mor}(I) \\ \text{上述全体箭头均交换} \end{array} \right. \end{array}$$

在集合范畴中, 先取余积 $\coprod_{i \in I} \alpha(i)$. 对每个态射 $\sigma: i \rightarrow j$ 与每个 $x \in \alpha(i)$, 加入关系

$$(i, x) \sim (j, \alpha(\sigma)(x)),$$

⁵当然, 这样可能并不严谨.

再取由这些关系生成的等价关系. 于是

$$\varinjlim_I \alpha \simeq \left(\coprod_{i \in I} \alpha(i) \right) / \sim.$$

当指标范畴滤过时, 这个生成的等价关系还有更直接的判据. 先给出所需定义.

定义 1.2.13. (滤过) 非空范畴 I 若满足以下条件, 则称是滤过的:

- 对于任意 $i, j \in \text{Ob}(I)$, 存在 $k \in \text{Ob}(I)$, 使得 $i \rightarrow k, j \rightarrow k$.
- 对于任意 $f, g: i \rightarrow j$ 存在 $k \in \text{Ob}(I)$ 以及 $h: j \rightarrow k$ 使得 $hf = hg$.

若 I 滤过, 则 (i, x_i) 与 (j, x_j) 等价, 当且仅当存在对象 k 及态射 $f: i \rightarrow k, g: j \rightarrow k$, 使得

$$\alpha(f)(x_i) = \alpha(g)(x_j) \in \alpha(k).$$

现在, 我们来给出一些日后经常打交道的例子.

例 1.2.14. (积, 余积, 等子, 余等子) 1. 如前文一般, 取 I 为离散范畴, 不妨把 I 等同于 $\text{Ob}(I)$. 此时 $\varinjlim \alpha$ 称作对象 $X_i := \alpha(i)$ 的余积, 写作 $\coprod_{i \in I} X_i$; 相应地, $\prod_{i \in I} X_i := \varprojlim \alpha$ 称为对象 X_i 的积.

2. 取 $I = \bullet \rightrightarrows \bullet$ 给出的范畴 (两个对象, 两个非 id 的态射), 此时 $\alpha: I \rightarrow \mathcal{C}$ 可以描述为 $X \rightrightarrows Y$ 我们想要探究这两个态射中“相同”的部分, 放在集合上看, 就是讨论 f, g 在 X 中上使得 $f(x) = g(x)$ 的部分, 但是我们现在的工作环境是范畴, 无法描绘对象内部的东西, 因此我们需要迂回一下 (这目前看来可能并不严谨), 我们从外部视角来看“相同”的部分, 它满足的条件就是在说对于 $\phi: T \rightarrow X$, 若其“像”(记作 $\text{im}(\phi)$), 反映了 ϕ 在 X 上的信息) 落在“相同部分”(记作 $\ker(f, g)$) 之内, 则 $f\phi = g\phi$, 图解为我们总是有该图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \swarrow & \downarrow \phi & \searrow & \\ \text{im}(\phi) & \hookrightarrow & \ker(f, g) & \hookrightarrow & X \rightrightarrows Y \\ & & & & \uparrow f \\ & & & & g \end{array}$$

因此, 我们需要取“最大”的那个 $(\text{im } \phi)$ ⁶, 即 $\ker(f, g)$ 为 α 的极限 $\varprojlim \alpha$, 其泛性质相当于在说有下图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \swarrow \exists! & \downarrow \phi & \searrow & \\ \ker(f, g) & \hookrightarrow & X \rightrightarrows Y & & \end{array}$$

⁶当然, 此处的“最大”指的是根据 $\hookrightarrow$ 的关系下最大的一个.

$\ker(f, g)$ 由于描述的是“相等”的部分, 因此不妨称其为**等子**. 我们可以反过来, 问把 f 和 g 的信息粘起来, Y 还剩下什么 (记为 $\text{coker}(f, g)$). 这在集合中相当于说商集 $Y/\sim$, 其中 $\sim$ 为 $f(x) \sim g(x)$ 所生成的等价关系. 现在我们仍然从外部来刻画这一点, 这相当于说对于 $\psi: Y \rightarrow T$, 若 $\psi f = \psi g$ 那相当于说你不仅粘了, 可能还粘多了, 因此这个时候根据商的性质, 我们应当有 $\text{coker}(f, g) \rightarrow T$. 因此选出最大的对象 (即始对象) 作为 $\text{coker}(f, g)$, 即

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \nearrow & \uparrow \psi & \nwarrow \\ X & \xrightarrow[g]{} Y & \longrightarrow \text{coker}(f, g) \end{array}$$

根据先前的叙述, 相当于在说 $\text{coker}(f, g)$ 为 α 的余极限 $\varinjlim \alpha$.

3. 现在我们可以更加正式的定义像和余像. 对于 $\mathcal{C}$ 中态射 $f: X \rightarrow Y$, 则像为 f 在 Y 中的信息全体, 考虑推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y \sqcup_X Y \end{array}$$

则 $Y \rightarrow Y \sqcup_X Y$ 相当于将 f 带来的信息进行粘接, 因此可以将像定义为等子

$$\text{im}(f) := \ker \left(Y \rightrightarrows Y \sqcup_X Y \right)$$

类似地, 我们可以讨论 f 所反映的 X 中的信息 (在集合中, 将 $f(x) = f(y)$ 作为等价关系商去), 考虑拉回

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

则 $X \times_Y X \rightarrow X$ 相当于反映了 f 中像相等的 x 的等价类, 因此将余像定义为余等子

$$\text{coim}(f) := \text{coker} \left(X \times_Y X \rightrightarrows X \right)$$

不难发现有典范态射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{coim}(f) & \longrightarrow & \text{im}(f) \end{array}$$

读者可以验证:

$$f \text{ 满} \Leftrightarrow \text{im}(f) \xrightarrow{\sim} Y \text{ 且 } f \text{ 单} \Leftrightarrow X \xrightarrow{\sim} \text{coim}(f)$$

但是 $\text{coim}(f)$ 不一定同构于 $\text{im}(f)$, 因此即单又满的态射不一定是同构. 当 $\text{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$ 时, 我们称 f 为**严格态射**.

4. 在有余核的带点范畴中, 商对象 U/V 可以视为推出

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & U/V \end{array}$$

一般范畴中的极限或余极限未必存在. 若所有小图表的极限或余极限均存在, 我们分别得到如下两个性质.

定义 1.2.15. (完备与余完备) 范畴 $\mathcal{C}$ 称为**完备的**, 如果对每个小范畴 I 以及每个函子 $\alpha: I \rightarrow \mathcal{C}$, 极限 $\varprojlim_I \alpha$ 都存在; 称为**余完备的**, 如果所有这样的余极限 $\varinjlim_I \alpha$ 都存在.

例 1.2.16. • 根据我们前文在 $\mathbf{Set}$ 上的构造可知 $\mathbf{Set}$ 是完备且余完备的.

- 在拓扑空间中, 我们有极限拓扑和余极限拓扑, 它搭配上对应的极限与余极限集合即可得到极限与余极限拓扑空间.
- 群范畴 $\mathbf{Grp}$ 完备且余完备. 其极限由底层集合上的极限逐点赋予群结构; 余极限则由生成元与关系构造. 特别地, 群的推出是融合积.

§ 1.3 Kan 延拓

现在考虑范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$, 以及函子 $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, 如图所示

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ K \downarrow & \searrow F & \\ \mathcal{D} & \dashrightarrow ? \rightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

我们希望找到函子 $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 使得 LK 逼近于 F . 和极限一般, 我们有两种逼近方式, 一种是从较大的一侧往小逼近, 一种是较小一侧往大逼近.

在函子范畴 $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ 中, 两种逼近方向可以概括为

$$F \xrightarrow{\eta} (\text{Lan}_K F)K, \quad (\text{Ran}_K F)K \xrightarrow{\varepsilon} F.$$

左 Kan 延拓要求第一类逼近具有始对象式的万有性, 右 Kan 延拓则要求第二类逼近具有终对象式的万有性. 下面给出精确定义.

定义 1.3.1. (Kan 延拓) 考虑范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 间的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ K \downarrow & \searrow F & \\ \mathcal{D} & & \mathcal{E} \end{array}$$

其中 $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$.

- 函子 F 沿 K 的左 Kan 延拓意谓以下资料 $(\text{Lan}_K F, \eta)$, 其中
 - $\text{Lan}_K F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子.
 - $\eta: F \Rightarrow (\text{Lan}_K F)K$ 是自然变换.

使得以下泛性质成立: 对任何函子 $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然变换 $\xi: F \Rightarrow LK$, 存在唯一的自然变换 $\chi: \text{Lan}_K F \Rightarrow L$ 使得 $\xi = (\chi K)\eta$, 或以 2-胞腔图解为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{C} \\ K \downarrow & \searrow F & K \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{L} \mathcal{E} & \mathcal{D} \xrightarrow{\text{Lan}_K F} \mathcal{E} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nwarrow \xi & \\ & \eta & \\ & \searrow \chi & \end{array}$$

- 函子 F 沿 K 的右 Kan 延拓意谓以下资料 $(\text{Ran}_K F, \varepsilon)$, 其中
 - $\text{Ran}_K F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 是函子.
 - $\varepsilon: (\text{Ran}_K F)K \Rightarrow F$ 是自然变换.

使得以下泛性质成立: 对任何函子 $R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然变换 $\delta: RK \Rightarrow F$, 存在唯一的自然变换 $\theta: R \Rightarrow \text{Ran}_K F$ 使得 $\delta = \varepsilon \circ (\theta K)$, 或用 2-胞腔图解为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{C} \\ K \downarrow & \searrow F & K \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{R} \mathcal{E} & \mathcal{D} \xrightarrow{\text{Ran}_K F} \mathcal{E} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nwarrow \delta & \\ & \varepsilon & \\ & \searrow \theta & \end{array}$$

使用函子范畴 $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ 以及 $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ 的概念, 可以发现左, 右 Kan 延拓分别在说有双射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}(\text{Lan}_K F, L) &\xrightarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(F, LK) \\ \chi &\mapsto (\chi K)\eta, \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}(R, \text{Ran}_K F) &\xrightarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(RK, F) \\ \theta &\mapsto \varepsilon(\theta K); \end{aligned}$$

证明这一点只需要观察到每个 $\xi: F \Rightarrow LK$ 都唯一确定一个 χ , 而 χ 又反过来决定 $\xi = (\chi K)\eta$.

此外 Kan 延拓还有诸多的性质, 不过受限于本文讲解顺序, 将会在伴随函子之后讲解.

§ 1.4 可表函子与预层

本节将介绍一些“广义对象”，可以理解为漂浮在范畴上的幽灵，事实上，一般的函子都可以视为这样的广义对象，不过目前我们主要关注取值在集合上的情况，这种广义对象称为(集合)预层，该定义有一些拓扑学渊源，我们先来看拓扑空间上的情况。

定义 1.4.1. ($\mathcal{D}$ -值预层) 令 X 为拓扑空间, $\mathcal{D}$ 为范畴, $\text{Open}(X)$ 为 X 上开集构成 (以包含关系作为态射) 的范畴. 则 X 上的 $\mathcal{D}$ -值预层 $\mathcal{F}$ 就是一个函子

$$\mathcal{F} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$$

也即 $\text{Open}(X)$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个反变函子. 将全体 $\mathcal{D}$ -值预层构成的范畴记为 $\text{PSh}(\text{Open}(X), \mathcal{D})$, 特别地, 取 $\mathcal{D} = \text{Set}$ 时记为 $\text{Open}(X)^\wedge$.

这个定义也可以按对象与限制态射显式展开.

定义 1.4.2. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{D}$ 是范畴. 则 X 上取值于 $\mathcal{D}$ 的预层 $\mathcal{F}$ 由以下信息组成:

- 对每个开集 $U \subset X$, 有一个对象

$$\mathcal{F}(U) \in \mathcal{D},$$

称为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的**截面对象**.

- 对任两个开集 $U \subset V \subset X$, 有一个 $\mathcal{D}$ 中的态射

$$\text{res}_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U),$$

称为**限制映射**. 这个映射通常也记为 $(-)|_U$.

限制映射还满足如下函子性要求:

- $\text{res}_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$.
- 对于任意满足 $U \subset V \subset W$ 的开集, 都有 $\text{res}_U^W = \text{res}_U^V \circ \text{res}_V^W$.

当 $\mathcal{D} = \text{Set}$ 为集合范畴时, 通常称 $\mathcal{F}$ 为**集合预层**; 当 $\mathcal{D} = \text{Ab}$ 为 Abel 群范畴时, 通常称 $\mathcal{F}$ 为**Abel 预层**, 以此类推.

注记 1.4.3. 不妨将预层视为 U 上一堆函数的集合, 而限制映射此时就可以视为函数的限制, 因此自然为反变函子.

接下来将定义推广到一般范畴上, 不难发现 $\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 即为 $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D})$. 本节取 $\mathcal{D} = \text{Set}$, 将对应预层范畴记为 $\mathcal{C}^\wedge$.

此外, 还可以定义

$$\mathcal{C}^\vee := \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set}^{\text{op}}) = \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})^{\text{op}}.$$

第 1 章 范畴论基础

接下来观察 Hom-集, 不难发现 Hom-集实际上可以视为双函子

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathrm{Set} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).\end{aligned}$$

前一个 $\mathcal{C}$ 为反变的原因在于 $f: X' \rightarrow X$ 可以诱导拉回 $(X \xrightarrow{a} Y) \mapsto (X' \xrightarrow{a \circ f} Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$.

现在, 我们只选定一个部分, 得到函子 $h_{\mathcal{C}}$ 与 $k_{\mathcal{C}}$ 如下

$$\begin{aligned}h_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}^{\wedge} \\ S &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S) \\ k_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}^{\vee} \\ S &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, -).\end{aligned}$$

此时具有自然地求值函子

$$\mathrm{ev}^{\wedge}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}^{\wedge} \rightarrow \mathrm{Set}, \quad (S, A) \mapsto A(S)$$

以及对偶版本. 我们有以下重要引理

引理 1.4.4. (Yoneda 引理) 对于 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 以及 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\wedge})$, 映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(h_{\mathcal{C}}(S), A) &\rightarrow A(S) \\ \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S) \xrightarrow{\phi} A(-) \right) &\mapsto \phi_S(\mathrm{id}_S)\end{aligned}$$

为双射, 且关于 S 与 A 自然. 换言之, 它给出自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(h_{\mathcal{C}}(-), -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ev}^{\wedge}$. 特别地, Yoneda 嵌入 $h_{\mathcal{C}}$ 全忠实. 对偶叙述同样成立.

证明. 给定 $u \in A(S)$, 对每个对象 T 定义

$$\phi_T: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, S) \longrightarrow A(T), \quad f \mapsto A(f)(u).$$

函子性立即说明 ϕ 是自然变换 $h_{\mathcal{C}}(S) \Rightarrow A$, 且 $\phi_S(\mathrm{id}_S) = u$. 反过来, 若 ϕ 是这样的自然变换, 则自然性给出

$$\phi_T(f) = A(f)(\phi_S(\mathrm{id}_S)),$$

因而上述两个构造互逆. 最后取 $A = h_{\mathcal{C}}(T)$, 得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(h_{\mathcal{C}}(S), h_{\mathcal{C}}(T)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, T),$$

这正是 $h_{\mathcal{C}}$ 的全忠实性. □

注记 1.4.5. Yoneda 引理告诉我们, 范畴中的对象由所有别的对象到它的态射所完全描述. 例如, 对一个拓扑空间 X 而言, 如果对所有别的拓扑空间 Y , 都知道从 Y 到 X 的所有连续映射构成的集合 $\text{Hom}_{\text{Top}}(Y, X)$ 是什么样, 那我们也能知道 X 是哪个拓扑空间. 换言之, 我们可以用别的空间 Y 来“探测” X 的拓扑.

Yoneda 观点是指, 对于范畴中的对象 X 而言, 我们将 X 等同于其他对象到它的态射所组成的信息, 暂且称之为“探测信息”. 这样, 一份合理的探测信息应该 (通过同构) 能确定 (预层) 范畴中的对象. 若一份预层形式的探测信息同构于 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$, 就称它由对象 X 表出.

定义 1.4.6. (可表性) 称 $A: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 是可表函子, 如果存在 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 以及同构 $\phi: h_{\mathcal{C}}(X) \xrightarrow{\sim} A$. 此时称 (X, ϕ) 表出了 A , 称其为代表元.

注记 1.4.7. 由 Yoneda 引理的证明可知: 给定资料 (X, ϕ) 相当于给定 (X, u) 其中 $u = \phi_X(\text{id}_X) \in A(X)$.

有鉴于此, 可以使用 (X, u) , $u \in A(X)$ 来表述 A , 此时称 u 为泛族; 这起源于模空间的研究.

引理 1.4.8. 若 A 可被 (X, ϕ) 所表出, 则代表元在相差至多一个同构的意义下是唯一的.

证明. 留作习题. □

例 1.4.9. (子对象分类子) 在 Set 中, 任意子集 $A \subset X$ 都对应于特征映射 $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, 将 A 中元素对应于 1 而其它元素为 0. 使得我们有拉回图表

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \text{子对象分类子} \\ X & \xrightarrow{\chi_A} & \{0, 1\} \end{array}$$

可以视为对于 X 的“分类”.

在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 若存在拉回且子对象函子 (定义 1.1.5) $\text{Sub}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 可表, 则存在 Ω 使得

$$\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$$

此时 Ω 称为 $\mathcal{C}$ 的子对象分类子.

集合 $\{0, 1\}$ 是 Set 的子对象分类子, 因而有自然双射

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, \{0, 1\}) \simeq \text{Sub}_{\text{Set}}(X) \simeq \mathcal{P}(X).$$

换言之, 幂集函子由 $\{0, 1\}$ 表出.

§ 1.5 伴随函子

在线性代数中, 我们曾对于非退化的双线性形式定义过伴随 [代数学讲义, §8.2], 现在我们简要回顾它的概念: 对于有限维 $\mathbb{k}$ -向量空间 V 和 W ,

$$\begin{aligned} \text{指定非退化双线性形式 } V \times W \xrightarrow{B} \mathbb{k} &\iff \text{指定同构 } \varphi: W \xrightarrow{\sim} V^\vee \iff \text{指定同构} \\ &\psi: V \xrightarrow{\sim} W^\vee. \end{aligned}$$

而 B 在这些同构之下对应到 V 或 W 上的典范配对. 事实上, 双线性形式 B 可以用来表示对偶空间的所有元素, 更精确地说:

- 对于 $\lambda \in V^\vee$, 存在唯一的 $w \in W$ 使得 $\lambda = \varphi(w) := B(-, w)$;
- 对于 $\eta \in W^\vee$, 存在唯一的 $v \in V$ 使得 $\eta = \psi(v) := B(v, -)$.

现在, 给定两个双线性形式 B_1 和 B_2 , 设 B_1 非退化. 考虑以下两种情况

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \times & V'_1 \\ \downarrow T & & \uparrow \text{虚线} \\ V_2 & \times & V'_2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow B_1 \\ \searrow B_2 \end{array} F \quad \begin{array}{ccc} V_1 & \times & V'_1 \\ \uparrow \text{虚线} & & \downarrow T \\ V_2 & \times & V'_2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow B_1 \\ \searrow B_2 \end{array} F$$

其中 T 是给定的线性映射, 我们寻求虚线所示的线性映射, 它和 T 之间须具备某种翘班似的“伴随关系”.

定义 1.5.1. (线性映射的伴随映射) 考虑双线性形式 $B_i \in \text{Bil}(V_i, V'_i; F)$, 其中 $i = 1, 2$, 其中所有向量空间均有限维, 并假设 B_1 非退化.

1. 存在唯一的线性映射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_F(V_1, V_2) &\rightarrow \text{Hom}_F(V'_2, V'_1) \\ T &\mapsto T^*, \end{aligned}$$

其中 T^* 称为 T 相对于 B_1 和 B_2 的**右伴随**, 由下式刻画:

$$B_2(Tv_1, v'_2) = B_1(v_1, T^*v'_2), v_1 \in V_1, v'_2 \in V'_2$$

2. 存在唯一的线性映射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_F(V'_1, V'_2) &\rightarrow \text{Hom}_F(V_2, V_1) \\ T &\mapsto {}^*T, \end{aligned}$$

其中 *T 称为 T 相对于 B_1 和 B_2 的**左伴随**, 由下式刻画:

$$B_2(v_2, Tv'_1) = B_1({}^*Tv_2, v'_1), v'_1 \in V'_1, v_2 \in V_2.$$

现在, 我们 B_1 视为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 而 B_2 视为 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$, 且 T 变为函子, 则我们可以给出伴随在范畴上的推广⁷.

定义 1.5.2. (伴随函子) 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 设有函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. 称 F 和 G 构成一对伴随函子, 如果对 $x \in \mathcal{C}$ 和 $y \in \mathcal{D}$, 有自然同构

$$\varphi: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, Gy),$$

此时, 将两边视为 $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ 的函子.

此时, 称 F 是 G 的左伴随, G 是 F 的右伴随, 并记 $F \dashv G$, 称 (F, G, φ) 为伴随对.

对于两个态射 $f: Fx \rightarrow y$ 以及 $g: x \rightarrow Gy$, 称它们是相伴的, 指在伴随函子的角度下它们互相对应, 此时称 g 为 f 的右伴而 f 为 g 的左伴. 有时也记 $g = f^\#$ 以及 $f = g^\flat$.

现在我们来介绍常见的诸多伴随

例 1.5.3. (自由-遗忘伴随) 自由-遗忘伴随是伴随函子的一类经典例子, 比方 $F: \text{Set} \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{k})$ 将集合 X 映为其生成的自由模 $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{k}$, 而遗忘函子 $G: \text{Vect}(\mathbb{k}) \rightarrow \text{Set}$ 又将其遗忘为集合 (即将向量空间视为集合). 则等式

$$\text{Hom}_{\text{Vect}(\mathbb{k})}(FX, V) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(X, GV).$$

这说明集合 X 到向量空间 V 的映射等价于 X 所生成的向量空间到 V 的线性映射.

定义 1.5.4. (单位和余单位) 设 (F, G, φ) 为伴随对, 定义态射

$$\eta = (\eta_x)_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$$

为

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, Fx) &\xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, GFx), \\ \text{id}_{Fx} &\mapsto \eta_x \end{aligned}$$

翻转箭头可定义 $\varepsilon = (\varepsilon_x)_x: FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$. 称 η 为 (F, G, φ) 的单位, 而 ε 为 (F, G, φ) 的余单位.

至于验证 η 和 ε 为自然变换留给读者作为习题.

引理 1.5.5. (三角等式) 对于伴随对 (F, G, φ) , 我们有自然变换之间的等式, 为方便起见, 将其写为以下 2-胞腔的形式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\ F \searrow & \eta \Downarrow & \nearrow G \\ & D & \\ F \searrow & \varepsilon \Downarrow & \nearrow G \\ & D & \end{array} \xrightarrow{\text{id}_D} D = \text{id}_F, \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\ G \nearrow & \varepsilon \Downarrow & \searrow F \\ & D & \\ G \nearrow & \eta \Downarrow & \searrow F \\ & D & \end{array} \xrightarrow{\text{id}_D} D = \text{id}_G$$

⁷当然, 这只是一种形式上的推广.

证明. 留作习题. □

命题 1.5.6. 给定函子 $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$, 以下的映射互为逆

$$\{\varphi: (F, G, \varphi) \text{ 为伴随对} \} \longleftrightarrow \{(\eta, \varepsilon) \text{ 满足三角等式} \}$$

$$\varphi \longmapsto (\eta_X := \varphi(\text{id}_{FX}), \varepsilon_Y := \varphi^{-1}(\text{id}_{GY}))$$

$$\varphi(f) := Gf \circ \eta_X \longleftarrow (\eta, \varepsilon)$$

练习 1.5.7. 请读者验证, 伴随函子的复合也是伴随函子, 即若 $\mathcal{C}_1 \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{C}_2 \begin{matrix} \xrightarrow{F'} \\ \xleftarrow{G'} \end{matrix} \mathcal{C}_3$ 中 $F \dashv G, F' \dashv G'$ 则 $F'F \dashv GG'$.

定理 1.5.8. (伴随等价) 考虑一对拟逆函子 $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$, 并给定自然同构 $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$. 则存在唯一的自然同构 $\varepsilon: FG \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$, 使得 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ 为伴随对; 同时 $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ 也构成伴随对.

证明. [代数学方法卷一, 定理 2.6.12] □

例 1.5.9. (代数-几何对偶) 例 1.1.20 中的素谱等价可以选取拟逆并提升为伴随等价; 因而素谱函子与整体截面环函子在两个方向上互为伴随.

例 1.5.10. 根据我们推导极限的过程可以知道, 余极限是常值函子的左伴随而极限是常值函子的右伴随

$$\mathcal{C}^I \begin{matrix} \xrightarrow{\varinjlim} \\ \xleftarrow{\text{const}} \\ \xrightarrow{\varprojlim} \end{matrix} \mathcal{C}$$

1.5.1 伴随函子定理

现在, 来探讨一个函子何时具有左右伴随, 我们只讨论最基础的广义伴随函子定理, 特殊伴随函子定理以及在可表现范畴上的伴随函子定理暂且不表.

定义 1.5.11. 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 若函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 保所有的 $\varprojlim$, 则称其为连续的. 若函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 保所有的 $\varinjlim$, 则称其为余连续的.

命题 1.5.12. 右伴随函子都是连续的, 左伴随函子都是余连续的.

证明. 不过简单的泛性质练习. □

现在, 我们思考这个命题反过来是否成立. 答案是成立, 但是需要有特定的条件.
首先, 我们翻译 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随的条件.

命题 1.5.13. $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随当且仅当对于任意 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $G_{c/}$ 都有始对象.

证明. 首先, 对于任意 $c \in \mathcal{C}$, 考虑 $G_{c/}$, 其元素形如 $c \xrightarrow{\beta} Gd$, 其中 $d \in \mathcal{D}$, 而态射为使得以下图表交换的 $Gd \rightarrow Gd'$

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \swarrow & & \searrow \\ Gd & \xrightarrow{\quad} & Gd' \end{array}$$

由此可见, (d_0, β_0) 为始对象当且仅当有双射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d_0, d) &\xrightarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd) \\ \alpha &\mapsto \beta := (G\alpha)\beta_0 \end{aligned}$$

若 G 有左伴随, 则取 $d_0 = Fc$ 验证即可, 不难发现 $Gd_0 = GFc$, 因此 $\beta_0 = \eta_c$ 为单位, 由单位给出的双射可知 d_0 确实为始对象.

若对于任意 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 都有 $G_{c/}$ 存在始对象, 则令 $F(c) = d_0$ 给出函子, 由前文可知自然给出双射, 因此得到伴随. □

因此, 问题转变为研究 $G_{c/}$ 何时有始对象, 我们引入弱始系来说明这一点.

定义 1.5.14. (弱始系与弱始对象) 设 $\mathcal{E}$ 为范畴. 称 $\text{Ob}(\mathcal{E})$ 的非空小子集为**弱始系**, 如果对每个 $e' \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ 都存在 $e \in \Gamma$ 使得 $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(e, e') \neq \emptyset$, 若 $e \in \mathcal{E}$ 且 $\{e\}$ 为弱始系, 则称 e 为**弱始对象**.

不难发现, 对于弱始系 Γ , 有 $\prod_{e \in \Gamma} e$ 为弱始对象, 因此, 我们要求完备性.

对于 $G_{c/}$, 若对于每个 $f: c \rightarrow Gd$ 都存在 $i \in I$ 以及态射 $\alpha: d_i \rightarrow d$ 使得 f 可以分解为 $c \xrightarrow{f_i} Gd_i \xrightarrow{G\alpha} Gd$, 则 $\{(d_i, (c \rightarrow Gd_i))\}$ 给出弱始系.

引理 1.5.15. 设范畴 $\mathcal{E}$ 完备. 若其有弱始系 Γ , 则其有始对象.

证明. 由完备性可知弱始对象的存在性, 接下来取 $\mathcal{E}$ 的全子范畴 I , $\text{Ob}(I) = \{e\}$. 完备性确保 $I \hookrightarrow \mathcal{E}$ 中 $\varprojlim$ 的存在性, 记其为 x , 根据极限定义, 可以给出其泛性质, 记典范态射 $i: x \rightarrow e$, 有

$$\begin{aligned} i_*: \text{Hom}_{\mathcal{E}}(t, x) &\xrightarrow{1:1} \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(t, e): \forall \theta, \theta' \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(e, e), \theta\phi = \theta'\phi\} \\ \psi &\mapsto i\psi \end{aligned}$$

显然有 i 为单态射.

接下来说明 x 是始对象. 对任意 $g: x \rightarrow y$, 由 e 的弱始性任选态射 $e \rightarrow y$, 并与 $i: x \rightarrow e$ 合

成得到 $f: x \rightarrow y$. 取 f 与 g 的等子 $j: \text{Eq}(f, g) \hookrightarrow x$. 再由弱始性选取 $k: e \rightarrow \text{Eq}(f, g)$. 态射 $ijk: e \rightarrow e$ 与 id_e 在 i 上的复合相等, 而 i 是单态射, 故 $jki = \text{id}_x$. 因此 $f = f j k i = g j k i = g$, 这就证明了从 x 到任意对象的态射存在且唯一. $\square$

因此我们还需要说明 $G_{c/}$ 是完备的.

命题 1.5.16. 范畴 $\mathcal{D}$ 完备, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 保小 $\varprojlim$. 取 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

- 函子 $\prod_{c/}$ 保守 ($\prod_{c/} f$ 为同构当且仅当 f 为同构), 且生成所有小极限.
- 范畴 $G_{c/}$ 完备.
- $\prod_{c/}$ 映单态射为单态射.

证明. [wwli 卷二, 命题 1.11.4]. $\square$

现在, 可以给出伴随函子定理.

定理 1.5.17. (P.Freyd 伴随函子定理) 考虑 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$.

1. 设 $\mathcal{D}$ 为完备范畴, 函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 是连续的, 则 G 有左伴随当且仅当以下解集条件成立: 对于每个 $c \in \mathcal{C}$, 存在一族态射 $\{f_i: c \rightarrow Gd_i\}$ 使得每个 $f: c \rightarrow Gd$ 都存在 $i \in I$ 以及态射 $\alpha: d_i \rightarrow d$ 使得 f 可以分解为 $c \xrightarrow{f_i} Gd_i \xrightarrow{G\alpha} Gd$.
2. 对偶地, 可得到右伴随函子的判定准则.

1.5.2 Kan 延拓的进一步讨论

一种构造左右伴随的常见办法就是 Kan 延拓, 或者说 Kan 延拓在函子范畴上的展现.

命题 1.5.18. 给定范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 和函子 $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$. 考虑预合成函子 $K^*: \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$.

1. 精确到 $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ 中唯一的同构, 左 Kan 延拓 $(\text{Lan}_K F, \eta)$ 若存在则唯一; 右 Kan 延拓亦是如此.
2. 若沿 K 的左 Kan 延拓 (或右 Kan 延拓) 对所有 F 皆存在, 则得到 K^* 的左伴随函子 $\text{Lan}_K: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ (或右伴随函子 $\text{Ran}_K: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$). 定义 1.3.1 中的 η (或 ε) 正是相应伴随的单位 (或余单位).

证明. 显然. $\square$

注记 1.5.19. 有些教材直接使用这个命题作为 Kan 延拓定义.

发现 Kan 延拓其实是在寻求一个 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 使得 F 与 GK 之间有一个最佳的逼近. 那么如何对于 $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 定义 Gd 就成了问题. 唯一的线索是当 $d = Kc$ 时, Gd 在同构意义下应当被取为 Fc . 因此可以使用所有的 Fc 的 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$) 来逼近 Gd , 极限取遍所有的 $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 和态射 $Kc \rightarrow d$ (或 $d \rightarrow Kc$). 为了记号上的方便, 对于俯仰范畴进行一个扩充, 得到以下定义.⁸

定义 1.5.20. 若 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, 且 $d \in \mathcal{D}$ 为一个对象. 定义 $F_{/d}$ 为拉回

$$\begin{array}{ccc} F_{/d} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{/d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \end{array}$$

即 $F_{/d}$ 中对象为 $(c \in \mathcal{C}, \alpha: F(c) \rightarrow d)$ 态射为使得以下图表交换的 β

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F(\beta)} & F(c') \\ & \searrow \alpha & \swarrow \alpha' \\ & d & \end{array}$$

当 F 为子范畴的嵌入函子时, 简写为 $\mathcal{C}_{/d}$, 类似定义 $F_{d/}$ 和 $\mathcal{C}_{d/}$.

可以发现 $F_{/d}$ (或 $F_{d/}$) 带有典范的投影函子 $\prod_{/d}: F_{/d} \rightarrow \mathcal{C}$ 将 $(c, \alpha: F(c) \rightarrow d)$ (或 $(c, \alpha: d \rightarrow F(c))$) 映为 c , 态射 β 映为 β .

今后的重点在于合成函子 $F \prod_{/d}: K_{/d} \rightarrow \mathcal{E}$ 和 $F \prod_{d/}: K_{d/} \rightarrow \mathcal{E}$, 它们分别映对象 $(c, Kc \rightarrow d)$ 和 $(c, d \rightarrow Kc)$ 为 Fc . 在极限存在的情况下, 可以做几点观察:

- 任何 $d \rightarrow d'$ 诱导典范态射 $\varinjlim F \prod_{/d} \rightarrow \varinjlim F \prod_{/d'}$; 其刻画为使得图表

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xlongequal{\quad} & Fc \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim F \prod_{/d} & \longrightarrow & \varinjlim F \prod_{/d'} \end{array}$$

对每个 $(c, Kc \rightarrow d) \in \text{Ob}(K_{/d})$ 交换 (它诱导 $(c, Kc \rightarrow d') \in \text{Ob}(K_{/d'})$), 纵向箭头即为 $\varinjlim$ 自带的典范态射.

- 考虑 $(c, Kc \xrightarrow{\text{id}} Kc) \in \text{Ob}(K_{/Kc})$ 得到典范态射 $\eta_c: Fc \rightarrow \varinjlim F \prod_{/Kc}$.
- 任何 $c \rightarrow c'$ 皆诱导典范态射 $\varinjlim F \prod_{/Kc} \rightarrow \varinjlim F \prod_{/Kc'}$ 使得

$$\begin{array}{ccc} Fc & \longrightarrow & Fc' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim F \prod_{/Kc} & \longrightarrow & \varinjlim F \prod_{/Kc'} \end{array}$$

⁸其实是 [wvli 卷二, 定义 1.6.2]

交换. 鉴于对偶性, $\varprojlim F \prod_{d/}$ 也具备相应性质, 如典范态射 $\varepsilon_c: \varprojlim F \prod_{Kc/} \rightarrow Fc$ 等等. 次一定理的陈述基于这些函子性.

定理 1.5.21. 考虑函子 $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 和 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$.

1. 若对每个 $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, 余极限 $\varinjlim (F \prod_{/d})$ 在 $\mathcal{E}$ 中存在, 则

$$(\text{Lan}_K F)(d) := \varinjlim (F \prod_{/d})$$

确定左 Kan 延拓 $\text{Lan}_K F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$; 相应的 $\eta: F \Rightarrow (\text{Lan}_K F)K$ 由前述 $(\eta_c)_{c \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ 给出.

2. 若对每个 $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, 极限 $\varprojlim (F \prod_{d/})$ 在 $\mathcal{E}$ 中存在, 则

$$(\text{Ran}_K F)(d) := \varprojlim (F \prod_{d/})$$

确定右 Kan 延拓 $\text{Ran}_K F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$; 相应的 $\varepsilon: (\text{Ran}_K F)K \Rightarrow F$ 由前述 $(\varepsilon_c)_{c \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ 给出.

3. 若 $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 全忠实, 则 η 与 ε 同构.

证明. 与 2. 由于两者对偶, 只需证明第一点. 对函子 $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 以及自然变换 $\xi: F \Rightarrow LK$, 余极限的泛性质给出唯一的 $\chi_d: (\text{Lan}_K F)(d) \rightarrow Ld$, 具体刻画为图表

$$\begin{array}{ccc} Fc & \longrightarrow & (\text{Lan}_K F)(d) \\ \xi_c \downarrow & & \downarrow \chi_d \\ LKc & \xrightarrow{L(Kc \rightarrow d)} & Ld \end{array}$$

这些态射自然地组成 $\chi: \text{Lan}_K F \Rightarrow L$. 取 $d = Kc$ 及对象 $(c, \text{id}_{Kc}) \in K_{/Kc}$, 可得 $\xi_c = \chi_{Kc} \eta_c$. 余极限的泛性质同时给出 χ 的唯一性, 因而 $\text{Lan}_K F$ 确实是左 Kan 延拓.

3. 若 K 全忠实, 则 $K_{/Kc}$ 以 (c, id_{Kc}) 为终对象, 所以 $\eta_c: Fc \rightarrow (\text{Lan}_K F)(Kc)$ 为同构. 对偶地, $K_{Kc/}$ 以 (c, id_{Kc}) 为始对象, 所以 $\varepsilon_c: (\text{Ran}_K F)(Kc) \rightarrow Fc$ 也为同构.

□

注记 1.5.22. 若 $\mathcal{C}$ 为小范畴, 则 $K_{/d}$ 和 $K_{d/}$ 对每个 $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 都是小范畴. 因此当 $\mathcal{E}$ 余完备 (或完备) 时, 命题 1.5.18 与定理 1.5.21 可以说明拉回函子 K^* 必有左伴随 (或右伴随).

1.5.3 2-范畴看伴随

事实上, 2-范畴才是一个合理的看待伴随的角度, 虽然读者目前可能还没有接触过何谓 2-范畴, 不妨将其视为带有一些额外的 2-箭头的范畴.

定义 1.5.23. (伴随) 2-范畴中的一组伴随 $D \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} C$ 是如下信息:

- 一对对象 C, D ,
- 一对 1-态射 $f: C \rightarrow D$ (称为左伴随), $g: D \rightarrow C$ (称为右伴随),
- 一对 2-态射 $\eta: \text{id}_C \Rightarrow gf$ (称为单位), $\varepsilon: fg \Rightarrow \text{id}_D$ (称为余单位).

满足以下条件

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\ f \searrow & \eta \Downarrow & \nearrow g \\ & D & \\ \nearrow g & \varepsilon \Downarrow & \searrow f \\ D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \end{array} = \text{id}_f, \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ g \nearrow & \text{id}_C & \searrow \\ & D & \\ \nearrow g & \varepsilon \Downarrow & \searrow f \\ D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \end{array} = \text{id}_g$$

此时也称二元组 (η, ε) 使得 f 作为 g 的左伴随, 也称其使得 g 作为 f 的右伴随.

例 1.5.24. 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 以及 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 1-范畴之间的函子, 将其视为严格 2-范畴 Cat 中的 1-态射, 则 F 与 G 的伴随即为范畴论意义下的伴随函子.

§ 1.6 群对象

在范畴论中, **群对象**是群的概念的推广. 我们熟知, 群是带有乘法操作的集合, 使得乘法有单位元、逆元. 我们可以将其推广为任何范畴 $\mathcal{C}$ 的对象, 带有乘法操作, 并且乘法有单位元、逆元. 这样的对象就是 $\mathcal{C}$ 中的群对象.

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 具有有限乘积. 特别地, $\mathcal{C}$ 有终对象 $*$.

定义 1.6.1. $\mathcal{C}$ 中的**群对象**是四元组 (G, m, e, i) , 其中

- $G \in \mathcal{C}$ 是一个对象.
- $m: G \times G \rightarrow G$ 是态射, 称为**乘法**.
- $e: * \rightarrow G$ 是态射, 称为群对象的**单位元**.
- $i: G \rightarrow G$ 是态射, 称为**取逆元**.

使得以下图表交换:

- (结合律)

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times m} & G \times G \\ m \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

- (单位律)

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow (\text{id}_G, e) & \downarrow \text{id}_G & \searrow (e, \text{id}_G) & \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & \xleftarrow{m} & G \times G \end{array}$$

- (逆元)

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow (\text{id}_G, i) & \downarrow \bar{e} & \searrow (i, \text{id}_G) & \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & \xleftarrow{m} & G \times G \end{array}$$

其中 $\bar{e}: G \rightarrow G$ 是复合

$$G \longrightarrow * \xrightarrow{e} G.$$

若 G 还满足以下条件:

- (交换律)

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\delta} & G \times G \\ & \searrow m \quad \swarrow m & \\ & G & \end{array}$$

其中映射 δ 为交换两个分量, 则称 G 为交换群对象或 **Abel 群对象**.

有自然的方式定义群对象间的态射.

定义 1.6.2. 设 $G_k = (G_k, m_k, e_k, i_k)$ ($k = 1, 2$) 为群对象. 一个同态 $f: G_1 \rightarrow G_2$ 是一个态射 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 使得它与群结构相容, 即

$$fm_1 = m_2(f \times f), \quad fe_1 = e_2, \quad fi_1 = i_2f.$$

第一条等式也可以写成交换图表

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_1 & \xrightarrow{f \times f} & G_2 \times G_2 \\ m_1 \downarrow & & \downarrow m_2 \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}$$

容易验证, 群同态的复合还是同态. 从而我们得到一个范畴.

定义 1.6.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有有限乘积的范畴. $\mathcal{C}$ 的群对象范畴是如下范畴, 它的对象是 $\mathcal{C}$ 的群对象, 态射是群对象的同态. $\mathcal{C}$ 的交换群对象范畴是群对象范畴的由交换群对象构成的全子范畴.

第2章

抽象同伦论

- 本章研究的基本对象是带有一类弱等价的范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$. 保留全部高阶映射资料的内在对象是局部化 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})_\infty$; 本章先研究它的经典 1-范畴影子 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. 模型结构是在同一个范畴上额外指定余纤维化与纤维化, 使局部化可以用提升、分解以及柱对象和路径对象具体计算. 因而模型范畴应当看作同伦理论的一种点集呈现, 而不是同伦理论本身.
- 本章先从弱等价与局部化出发, 随后讨论提升性质、弱饱和类与弱分解系统, 再引入模型结构及对象替换. 最后我们在双纤维性对象上比较左右同伦, 并证明模型范畴版本的 Whitehead 定理, 从而把抽象局部化与可计算的同伦类联系起来.
- Quillen 在 [QuiHA, Chapter I] 中奠定了模型范畴方法. 本章采用现代的弱分解系统表述; 与某些参考书不同, 我们暂不把分解的函子性列入定义. 这一差别不会影响本章的对象级结论, 但在谈论替换函子时必须明确指出.

先说一个贯穿本章的想法. 在拓扑空间中, 弱同伦等价本身并不好直接求逆; 但把空间换成具有 CW 型的好对象以后, Whitehead 定理把弱同伦等价识别为同伦等价, 于是局部化的态射可以用映射模同伦来计算. 链复形也有同样的现象: 拟同构的形式逆很难操作, 而适当的投射或内射消解把问题搬到能用链同伦计算的对象上.

模型结构正是把这套办法公理化. 余纤维性替换与纤维性替换负责制造“好对象”, 柱对象与路径对象负责定义可计算的映射同伦, Whitehead 定理则保证双纤维性对象之间的弱等价已经是同伦等价. 换句话说, 我们真正想研究的仍然是局部化; 纤维化与余纤维化是为了控制它而加入的计算资料. 本章先算普通同伦范畴, 下一章再通过单纯模型看见局部化中没有被 1-截断丢掉的映射空间. 后文比较拓扑空间、Kan 单纯集、拟范畴与单纯范畴时, 都会反复使用这一思路.

§ 2.1 相对范畴与局部化

2.1.1 同伦范畴

定义 2.1.1. (弱等价范畴) **相对范畴**是指二元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$, 其中 $\mathcal{C}$ 是范畴, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ 是宽子范畴. 本章把还满足下述 **3 选 2** 性质的相对范畴称为**弱等价范畴**: 对任意可复合态射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,$$

若 f, g, gf 中任意两个属于 $\mathcal{W}$, 则第三个也属于 $\mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ 中的态射称为**弱等价**. 因而一般的相对范畴未必是本章意义下的弱等价范畴.

注记 2.1.2. (3 选 2 与 6 选 2) 不要把上述公理与更强的 **6 选 2** 性质混淆. 后者断言: 对可复合的

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T,$$

若 $gf, hg \in \mathcal{W}$, 则 f, g, h, hgf 都属于 $\mathcal{W}$. **6 选 2** 蕴含 **3 选 2**: 在需要由 $f, gf \in \mathcal{W}$ 推出 $g \in \mathcal{W}$ 时, 对三元组 (id_X, f, g) 应用 **6 选 2**; 另一种消去情形则对 (f, g, id_Z) 应用 **6 选 2**. 反向蕴含对一般弱等价范畴并不成立, 因此本章的基础定义只要求 **3 选 2**.

现在说明如何从弱等价范畴得到同伦范畴. 其目标是普适地把指定的弱等价变为同构; 这一过程称为关于 $\mathcal{W}$ 的**局部化**.

定义 2.1.3. (同伦范畴) 给定弱等价范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$, 其**同伦范畴** $\text{Ho}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{W}$ 的局部化, 带有函子 $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$, 满足以下泛性质: 对于任意函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 如果 F 将 $\mathcal{W}$ 中所有态射都映为同构, 则存在相差唯一自然同构的函子 $\tilde{F}: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$, 使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow & \nearrow \exists! \tilde{F} \\ & \text{Ho}(\mathcal{C}) & \end{array}$$

在相差自然同构的意义下交换. 换句话说, 对于任意范畴 $\mathcal{D}$, 令 $\text{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中将 $\mathcal{W}$ 中态射映为同构的函子所张成的全子范畴, 则 γ 诱导范畴等价

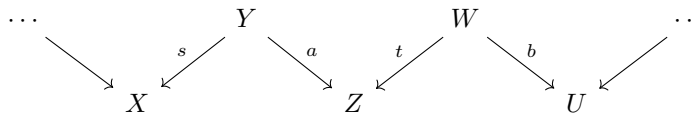
$$\gamma^*: \text{Fun}(\text{Ho}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

注记 2.1.4. 同伦范畴也可以写为 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Pierre Gabriel 以及 Michel Zisman 在 [GZ67, p. 1.1] 给出局部化的形式构造, 由此可以给出同伦范畴构造如下:

1. $\text{Ho}(\mathcal{C})$ 中的对象即为 $\mathcal{C}$ 中的对象.

2. 态射表现为有限长的“锯齿”



其中如 t, s 等反向箭头都应当在 $\mathcal{W}$ 内, 再商去以下等价关系:

- 恒同态射可以去掉,
- 相邻同向箭头可以复合,
- 相邻异向箭头若表示同一个态射则可去掉.

这样的构造是普适的, 但是缺陷也很明显, 我们没有理由说明 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})(X, Y)$ 为小集合, 这使我们无法直接保证 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 是局部小的. 此外, 由于等价关系难以操作, 我们也难以具体刻画其中的态射.

例 2.1.5. • 若 $\mathcal{W}$ 只含 $\mathcal{C}$ 中的同构, 则局部化函子 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ 是范畴等价.

- 对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 取 $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ 中的拟同构为 $\mathcal{W}$, 所得局部化正是导出范畴 $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. 这里局部化的定义与形式构造可参见 [GZ67, Chapter I, §1].

§ 2.2 提升性质与弱分解系统

首先我们给出一些提升性质的说明, 这一块的符号并没有什么统一, 本文采取 [Land] 的符号.

定义 2.2.1. (提升性质) 设 $\mathcal{C}$ 是范畴, $J \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是一类态射.

- 称 $\mathcal{C}$ 中态射 $p: X \rightarrow Y$ 对 J 具有**右提升性质** (简写作 RLP), 如果对 $\mathcal{C}$ 中任意实线图

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

其中态射 $A \rightarrow B$ 在 J 中, 存在虚线箭头使图表交换. 所有具有此性质的态射 p 构成的类记为 $\chi_R(J)$.

- 称 $\mathcal{C}$ 中态射 $i: A \rightarrow B$ 对 J 具有**左提升性质** (简写作 LLP), 如果对 $\mathcal{C}$ 中任意实线图

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

其中态射 $X \rightarrow Y$ 在 J 中, 存在虚线箭头使图表交换. 所有具有此性质的态射 i 构成的类记为 $\chi_L(J)$.

此外, 记 $\chi(J) = \chi_L(\chi_R(J))$, 它表示这样一类态射, 它们对于关于 J 具有右提升性质的态射是具有左提升性质的.

不难证明 $\chi_R\chi(J) = \chi_R(J)$.

注记 2.2.2. (弱正交, J -内射与投射态射) 右/左提升性质在有些资料 (比如 [Kerodon]) 中也叫右/左弱正交. 对于 J , 以及 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, 称

- f 是 J -内射态射, 指 $f \in \chi_R(J)$.
- f 是 J -投射态射, 指 $f \in \chi_L(J)$.

如同代数几何一般, 我们希望具有右/左提升性质的态射足够好, 此处足够好的定义就是在推出/拉回之下稳定, 当然, 由于我们比较关心余极限, 因此只考虑推出的情况, 拉回可以直接对偶地得到.

定义 2.2.3. 令 $\mathcal{C}$ 为推出均存在的范畴, 令 S 为 $\mathcal{C}$ 中一些态射, 若每个 $\mathcal{C}$ 中的推出图表

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

都有若 $f \in S$ 则 $f' \in S$ 的性质, 则称态射类 S 在推出下是稳定的.

当然这一条对于右提升/拉回情况是很有用的.

命题 2.2.4. 若 $\mathcal{C}$ 为具有推出的范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中的一些态射, 令 $S = \chi_L(T)$, 则 S 在推出下是稳定的.

证明. 先给出一个如下图左侧所示的推出图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & A' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{t} & B' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u} & X \\ f' \downarrow & \nearrow & \downarrow g \\ B' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

其中 $f \in S$. 只需要证明 $f' \in S$ 即可, 由于 $S = \chi_L(T)$, 因此要做的不过是验证一个左提升性质, 对于任意 $g \in T$ 且 $g: X \rightarrow Y$, 需要证明右侧图表中对角的虚线是存在的, 不妨把上图拼到一起得到

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{uos} & X \\ f \downarrow & \nearrow & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{vot} & Y \end{array}$$

而 $f \in S = \chi_L(T)$ 因此存在提升 $B \rightarrow X$, 而后由于上图左侧为推出, 因此根据泛性质得到存在提升 $B' \rightarrow X$, 即 $f' \in S$. $\square$

不难类似得到 $\chi_R(T)$ 关于拉回是稳定的.

接下来我们讨论收缩核, 这一概念来自于代数拓扑的收缩核.

定义 2.2.5. (收缩核) 令 $\mathcal{C}$, $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 为一对对象, 若存在态射 $i : X \rightarrow Y$ 以及 $r : Y \rightarrow X$ 使得 $r \circ i = \text{id}_X$, 则称 X 为 Y 的收缩核.

当然, 我们可以对于两个态射讨论收缩概念, 这需要我们稍微转变观点, 将目光放在 $\text{Fun}([1], \mathcal{C})$ 上.

定义 2.2.6. (态射作为收缩核) 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. 考虑态射 $f : X \rightarrow Y$ 以及 $f' : X' \rightarrow Y'$, 现在将 f 与 f' 视为 $\text{Fun}([1], \mathcal{C})$ 中的对象, 若 f 为 f' 在 $\text{Fun}([1], \mathcal{C})$ 中为收缩核, 则称 f 为 f' 的收缩核. 显式的看, 即存在交换图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\bar{i}} & Y' & \xrightarrow{\bar{r}} & Y \end{array}$$

其中 $r \circ i = \text{id}_X$ 且 $\bar{r} \circ \bar{i} = \text{id}_{Y'}$.

结合前文关于在推出 (拉回) 下稳定这一定义, 自然可以推导出在收缩核下稳定这一概念, 这无非是说若 f 为 f' 的收缩核而 $f' \in S$ 则 $f \in S$. 接下来我们把它与左右提升结合起来.

命题 2.2.7. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中的一些态射, 而 $S = \chi_L(T)$. 则 S 在收缩核下是稳定的.

证明. 取 $f' \in S$, 考虑如下图左侧所示的收缩核

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\bar{i}} & Y' & \xrightarrow{\bar{r}} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & A \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

其中 $r \circ i = \text{id}_X$ 且 $\bar{r} \circ \bar{i} = \text{id}_{Y'}$. 需要说明 $f \in S = \chi_L(T)$, 这只需要验证对于任意的 $g \in T$, 上图右侧的交换图表中虚线箭头所表示的提升确实存在即可, 和命题2.2.4中证明一样, 把上图左侧和右侧结合起来得到

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u \circ r} & A \\ f' \downarrow & \nearrow h' & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{v \circ \bar{r}} & B \end{array}$$

由 $f' \in S = \chi_L(T)$ 保证了提升 h' 的存在性, 而后由于 $u \circ r \circ i = u, v \circ \bar{r} \circ \bar{i} = v$ 因此取 $h = h' \circ \bar{i}$ 即可. $\square$

右提升的情况自然类似可证.

接下来的概念 (超限复合) 需要一点点序数以及超限归纳法的知识,[代数学方法卷一, §1.2-1.3] 中的内容应当是完全足够的, 或者读者也可以看 [Kerodon, 03PV].

对于每个序数 α , 令 $\text{Ord}_{\leq \alpha} = \{\beta : \beta \leq \alpha\}$ 为小于等于 α 的全体序数构成的全序集.

定义 2.2.8. (超限复合下稳定) 取 $\mathcal{C}$ 为范畴, S 为 $\mathcal{C}$ 中的一类态射. 称态射 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ 是 S 中态射的一个**超限复合**, 如果存在序数 α 以及函子 $F : \text{Ord}_{\leq \alpha} \rightarrow \mathcal{C}$. 将其对象与结构态射分别记作 C_β 与 $f_{\gamma, \beta} : C_\beta \rightarrow C_\gamma$, 并要求

1. 对于任意非零极限序数 $\lambda \leq \alpha$, 典范态射

$$\text{colim}_{\beta < \lambda} C_\beta \longrightarrow C_\lambda$$

是同构; 换言之, 这个序数图表在每个极限阶段都是连续的.

2. 对于任意序数 $\beta < \alpha$, 态射 $f_{\beta+1, \beta}$ 在 S 内.

3. 态射 f 等同于 $f_{\alpha, 0} : C_0 \rightarrow C_\alpha$.

若 S 的每个超限复合仍属于 S , 则称 S 在超限复合下稳定.

之后是老生常谈的讨论左右提升性质与超限复合, 这次的证明与前文稍显复杂, 但是核心还是一致的.

命题 2.2.9. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, T 为 $\mathcal{C}$ 中的一些态射, 且 $S = \chi_L(T)$, 则 S 在超限复合下是稳定的.

证明. 首先给定序数 α , 并且假设具有函子 $F : \text{Ord}_{\leq \alpha} \rightarrow \mathcal{C}$, 它由以下满足条件 1. 的有序对

$$(\{C_\beta\}_{\beta \leq \alpha}, \{f_{\gamma, \beta}\}_{\beta \leq \gamma \leq \alpha})$$

给出. 假设每个 $f_{\beta+1, \beta}$ 都在 S 内. 我们现在希望说明 $f = f_{\alpha, 0}$ 在 S 内. 这需要验证

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u} & X \\ f_{\alpha, 0} \downarrow & \nearrow & \downarrow g \\ C_\alpha & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

中提升的存在性. 接下来利用 $f_{\beta+1, \beta}$ 都在 S 内去证明这一点, 利用超限归纳的原理, 从 u 开始构造一族态射 $\{u_\beta : C_\beta \rightarrow X\}_{\beta \leq \alpha}$, 它满足与 v 和 g 的交换性 (下图左侧) $g \circ u_\beta = v \circ f_{\alpha, \beta}$ 以及 u_β 自身归纳的相容性 (下图右侧) $u_\beta = u_\gamma \circ f_{\gamma, \beta}$ 用图表表示出来就是

$$\begin{array}{ccc} C_\beta & \xrightarrow{u_\beta} & X \\ f_{\alpha, \beta} \downarrow & & \downarrow g \\ C_\alpha & \xrightarrow{v} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_\beta & \xrightarrow{u_\beta} & X \\ f_{\gamma, \beta} \downarrow & \nearrow u_\gamma & \\ C_\gamma & & \end{array}$$

接下来显式的来构造它, 当然, 我们需要从 0 开始, 然后处理后继以及极限序数的情况

▷ **第零项** $u_0 = u$ 给定.

▷ **后继项** 设 $\gamma = \beta + 1$ 为后继序数. 此时 u_γ 由以下提升给出 (由于 $f_{\beta+1, \beta} \in S$ 保证了提升存在)

$$\begin{array}{ccc} C_\beta & \xrightarrow{u_\beta} & X \\ f_{\beta+1, \beta} \downarrow & \nearrow u_{\beta+1} & \downarrow g \\ C_{\beta+1} & \xrightarrow{v \circ f_{\alpha, \beta+1}} & Y \end{array}$$

▷ **极限项** 设 γ 为非零极限序数, 则根据定义 $C_\gamma \cong \operatorname{colim}_{\beta < \gamma} C_\beta$. 已经构造出的相容族 $\{u_\beta : C_\beta \rightarrow X\}_{\beta < \gamma}$ 由余极限的泛性质唯一诱导 $u_\gamma : C_\gamma \rightarrow X$, 并满足 $gu_\gamma = vf_{\alpha, \gamma}$.

因此得到提升 $u_\alpha : C_\alpha \rightarrow X$. □

根据前文的讨论, 我们可以介绍以下概念.

定义 2.2.10. (弱饱和) 令 $\mathcal{C}$ 为范畴且具有小余极限, 令 S 为 $\mathcal{C}$ 中一类态射, 若 S

- 在推出下稳定.
- 在收缩核下稳定.
- 在超限复合下稳定.

则称 S 是弱饱和的.

接下来讨论弱饱和的若干性质, 首先, 给出弱饱和的一个重要判准:

命题 2.2.11. (重要) 设 $\mathcal{C}$ 为范畴且具有小余极限, T 为 $\mathcal{C}$ 中一些态射, 令 $S = \chi_L(T)$ 则 S 是弱饱和的.

证明. 前文已经证明. □

推论 2.2.12. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴且具有小余极限, T 为 $\mathcal{C}$ 中一些态射, $\chi(T) = \chi_L(\chi_R(T))$ 也是弱饱和的, 并且显然有 $T \subset \chi(T)$.

注记 2.2.13. (生成的弱饱和态射类) 容易得知, 弱饱和态射类的交也是弱饱和的, 因此令 $\mathcal{C}$ 为范畴, S_0 为 $\mathcal{C}$ 中的一类态射. 则存在一个包含 S_0 的最小的弱饱和类 (类似于闭包定义, 取 $\overline{S_0} = \bigcap_{S_0 \subset H, H \text{ 弱饱和}} H$) 称 $\overline{S_0}$ 为由 S_0 所生成的弱饱和态射类. 因此, 若 S_0 对于 T 具有左提升性质, 则 $\overline{S_0}$ 对于 T 也具有左提升性质.

命题 2.2.14. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴且具有小余极限, S 为 $\mathcal{C}$ 中的弱饱和态射类, 则

- 所有的同构都在 S 中.
- S 在态射复合下是稳定的, 即若 $f : X \rightarrow Y$ 与 $g : Y \rightarrow Z$ 都在 S 中则 $g \circ f$ 也在 S 中.

证明. 超限复合中 $\alpha = 0$ 的情形说明每个恒同态射都在 S 中. 任意同构 $f : X \rightarrow Y$ 在箭头范畴中都是 id_Y 的收缩核: 两个方向的方块分别由 (f, id_Y) 与 (f^{-1}, id_Y) 给出. 因 S 对收缩核封闭, 得到 $f \in S$. 复合封闭性则是长度为 2 的超限复合情形. $\square$

2.2.1 弱分解系统

引理 2.2.15. (收缩核论证) 若态射 $f : X \rightarrow Y$ 可以被分解为如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & T & \end{array}$$

若 f 关于 i (或 p) 具有右 (左) 提升性质, 则 f 为 p (或 i) 的收缩核.

证明. 不妨设 $f \in \chi_R(i)$, 因此以下提升问题有解

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ i \downarrow & \nearrow r & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

将解记为 r , 因此可以得到 $r \circ i = \text{id}_X$, 因此可以得到收缩核

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & T & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow f \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

$\square$

而后, 我们来介绍弱分解系统的概念

定义 2.2.16. (弱分解系统) 弱分解系统是指三元组 $(\mathcal{C}, L, R)$, 其中 $\mathcal{C}$ 为范畴, L 和 R 为 $\mathcal{C}$ 中满足以下性质的态射类:

- $L = \chi_L(R)$ 且 $R = \chi_R(L)$.
- 每个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ 都可以被分解为

$$X \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} Y$$

其中 $i \in L$ 且 $p \in R$.

命题 2.2.17. 令 $(\mathcal{C}, L, R)$ 为弱分解系统, 则

1. L 和 R 都包含 $\mathcal{C}$ 中的同构.

2. L 和 R 都在态射复合下稳定, 此外 L 还在超限复合下稳定.

3. L 和 R 均在收缩核下稳定.

4. L 在推出下稳定, R 在拉回下稳定.

证明. 留作习题. □

例 2.2.18. 记 $\mathbf{HCof}$, $\mathbf{HFib}$, $\mathbf{HoEq}$ 为闭 Hurewicz 余纤维化, Hurewicz 纤维化以及同伦等价所构成的类, 则 $(\mathbf{Top}, \mathbf{HCof} \cap \mathbf{HoEq}, \mathbf{HFib})$ 以及 $(\mathbf{Top}, \mathbf{HCof}, \mathbf{HFib} \cap \mathbf{HoEq})$ 均为弱分解系统.

接下来给出一种非常有用的结论.

命题 2.2.19. 令 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}': G$ 为一对伴随, 若 $(\mathcal{C}, L, R)$ 与 $(\mathcal{C}', L', R')$ 为弱分解系统, 则 $F(L) \subset L'$ 当且仅当 $G(R') \subset R$.

证明. 先设 $F(L) \subset L'$. 对于 $(C \xrightarrow{i} D) \in L$ 以及 $(X \xrightarrow{p} Y) \in R'$, 由假设可知左侧提升问题有解, 而伴随性给出下述两个提升问题的自然对应

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \longrightarrow & X \\ F(i) \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ F(D) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & G(X) \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow G(p) \\ D & \longrightarrow & G(Y) \end{array}$$

因此 $G(p)$ 对每个 $i \in L$ 都有右提升性质, 即 $G(p) \in \chi_R(L) = R$.

反之设 $G(R') \subset R$. 对任意 $i \in L$ 与 $p \in R'$, 右侧提升问题因 $i \in L = \chi_L(R)$ 且 $G(p) \in R$ 而有解; 经上述伴随对应, 左侧提升问题也有解. 因而 $F(i) \in \chi_L(R') = L'$, 即 $F(L) \subset L'$. □

§ 2.3 模型结构与 Quillen 伴随

现在, 我们来给出范畴上的模型结构, 正如本节前言所述, 它是范畴上配备有三类在复合下稳定的态射, 分别称为弱等价 (核心), 纤维化以及余纤维化:

- 弱等价如本章前言所述, 扮演“同伦等价”或者更一般 (例如弱同伦等价) 的角色.
- 纤维化扮演着“好的满射”这一角色. 比如说拓扑空间范畴中的 Hurewicz 纤维化.
- 余纤维化扮演着“好的单射”这一角色. 比如说拓扑空间范畴中邻域形变收缩核 (NDR) 就是余纤维化.

在这种意义下, 模型范畴就是“同伦理论的模型”或“同伦理论的模型的范畴”, 我们真正关心的是由纤维化与余纤维化所产生的对象, 分别称为纤维性对象与余纤维性对象, 以及既是纤维性对象又是余纤维性对象的双纤维性对象.

定义 2.3.1. (模型结构) 范畴 $\mathcal{C}$ 上的**模型结构**是指范畴 $\mathcal{C}$ 配上三类额外的态射:

- 余纤维化 $\text{Cof} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$.
- 纤维化 $\text{Fib} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$.
- 弱等价 $W \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$.

满足下述条件

1. W 可以使得 $\mathcal{C}$ 变成弱等价范畴 (定义 2.1.1), 换言之, 其满足 3 选 2 性质.
2. $(\mathcal{C}, \text{Cof} \cap W, \text{Fib})$ 为弱分解系统.
3. $(\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$ 为弱分解系统.

事实上, 在弱等价类 W 已经固定以后, 弱分解系统中的两类态射能由提升性质互相确定; 因而指定 Cof 或 Fib 中的一类以及相应的平凡态射类, 就能恢复另一类.

例 2.3.2. • 若 $\mathcal{C}$ 为完备且余完备范畴, 则其上可以具有三种模型结构, 只需要选取其中一个为 $\mathcal{C}$ 中的全体同构, 而剩下二者为 $\mathcal{C}$ 中的全体态射. 比如选取全体同构为弱等价, 余纤维化和纤维化为 $\mathcal{C}$ 中的全体态射, 此时 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{C}$ 分解为 (id_x, f) 和 (f, id_y) , 此时称为**平凡模型结构**.

- 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都具备模型结构, 则 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 也具备模型结构: (f, g) 为余纤维化 (或纤维化, 弱等价) 当且仅当 f 和 g 均为余纤维化 (或纤维化, 弱等价), 该结构称为**乘积模型结构**.

定义 2.3.3. (模型范畴) 称四元组 $(\mathcal{C}, W, \text{Cof}, \text{Fib})$ 为**模型范畴**, 指 $\mathcal{C}$ 为完备且余完备的范畴, 并且 $(W, \text{Cof}, \text{Fib})$ 构成其上的模型结构. 在不引起歧义的情况下, 一般简写为 $\mathcal{C}$.

而后, 给出一些术语

定义 2.3.4. (术语) • $W \cap \text{Fib}$ 中的元素 (即同时为弱等价的纤维化) 称为**平凡纤维化**或称**零伦纤维化**.

- $W \cap \text{Cof}$ 中的元素 (即同时为弱等价的余纤维化) 称为**平凡余纤维化**或称**零伦余纤维化**.
- 对于 $X \in \mathcal{C}$, 若始对象到其的态射 $\emptyset \rightarrow X$ 为余纤维化, 则称其为**余纤维性对象**.
- 对于 $X \in \mathcal{C}$, 若其到终对象的态射 $X \rightarrow *$ 为纤维化, 则称其为**纤维性对象**.
- 对于 $X \in \mathcal{C}$, 若其既是纤维性又是余纤维性的, 则称其为**双纤维性对象**.

以下给出一组与导出范畴密切相关的模型结构; 证明可参见 [Hovey, Chapter 2] 以及 [DG10].

例 2.3.5. (常见的模型范畴) 令 R 为环, 考虑 R -模链复形范畴 $\text{Ch}(R\text{-Mod})$. 这里需要区分“逐度投射/内射”与模型结构真正检测到的 dg-投射/dg-内射条件: dg-投射复形 P 的每一项都是投射模, 且对每个无环复形 E , 映射复形 $\text{Hom}_R^*(P, E)$ 无环; dg-内射复形由对偶条件定义.

• 链复形的**投射模型结构**:

- W 为拟同构构成的类.
- Fib 为逐度满射.
- Cof 为逐度分裂的单射, 其余核为 dg-投射复形.
- 所有对象都纤维性; 余纤维性对象恰为 dg-投射复形. 因此双纤维性对象也恰为 dg-投射复形, 而不是任意逐度投射的复形.

• 链复形的**内射模型结构**:

- W 为拟同构构成的类.
- Cof 为逐度单射.
- Fib 为逐度满射, 其核为 dg-内射复形.
- 所有对象都余纤维性; 纤维性对象恰为 dg-内射复形. 因此双纤维性对象也恰为 dg-内射复形, 而不是任意逐度内射的复形.

dg-投射复形必为 K-投射复形, dg-内射复形必为 K-内射复形; 这正是这些模型结构能够呈现无界导出范畴的原因.

命题 2.3.6. 给定模型范畴 $\mathcal{C}$, 则

- $W, \text{Cof}, \text{Fib}$ 均在收缩核下稳定.
- Cof 和 $W \cap \text{Cof}$ 在推出下稳定.
- Fib 和 $W \cap \text{Fib}$ 在拉回下稳定.

除分解的函子性外, 上述定义与 [Hovey, Definition 1.1.3] 的公理相同. Hovey 把两种分解都要求为函子性分解; 本文采用只要求分解存在的约定. 若后续需要真正的替换函子, 我们会额外假设或选定函子性分解. 此时, 我们发现并非所有对象都是纤维性或者说是余纤维性的, 那我们是否能够退而求其次, 找到其替代品, 答案是肯定的.

定义 2.3.7. ((余) 纤维性替换) 设 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, 且 $X \in \mathcal{C}$.

- 选取分解

$$\emptyset \longrightarrow QX \xrightarrow{q_X} X, \quad \emptyset \rightarrow QX \in \text{Cof}, \quad q_X \in W \cap \text{Fib},$$

称 $q_X: QX \rightarrow X$ 为 X 的**余纤维性替换** (也称余纤维性消解或逼近).

- 选取分解

$$X \xrightarrow{r_X} RX \longrightarrow *, \quad r_X \in W \cap \text{Cof}, \quad RX \rightarrow * \in \text{Fib},$$

称 $r_X: X \rightarrow RX$ 为 X 的**纤维性替换** (也称纤维性消解或逼近).

注记 2.3.8. (替换的函子性) 模型范畴公理保证每个对象都存在上述替换, 但若弱分解系统只要求分解存在, 任意逐对象选取的 QX 与 RX 并不会自动组成函子. 只有在额外选定函子性分解以后, 才得到函子

$$Q, R: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

以及自然弱等价 $q: Q \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ 和 $r: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow R$. 本章在只涉及单个对象时不需要这项额外选择.

命题 2.3.9. 对任意对象 X , 依次选取替换所得的 $R(QX)$ 与 $Q(RX)$ 都是双纤维性对象, 并分别通过弱等价锯齿与 X 相连.

证明. QX 余纤维性, 而 $QX \rightarrow R(QX)$ 是平凡余纤维化, 所以复合 $\emptyset \rightarrow QX \rightarrow R(QX)$ 是余纤维化; 又 $R(QX)$ 按定义纤维性, 故它双纤维性. 对偶地, $Q(RX) \rightarrow RX$ 是平凡纤维化, 而 $RX \rightarrow *$ 是纤维化, 所以 $Q(RX) \rightarrow *$ 是纤维化; 再结合 $Q(RX)$ 的余纤维性即可. 所涉及的替换态射都是弱等价, 因而给出所称的锯齿. $\square$

注记 2.3.10. 在链复形的投射模型结构中, 余纤维性替换给出 dg-投射消解; 在内射模型结构中, 纤维性替换给出 dg-内射消解. 这比只要求逐度投射或逐度内射更强, 也正是模型范畴替换能够计算无界导出函子的原因.

我们仍以一个非常重要的引理来结束本段内容

引理 2.3.11. (Ken Brown) 令 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, $\mathcal{D}$ 为弱等价范畴, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子. 若 F 将余纤维性对象之间的平凡余纤维化变为弱等价, 则 F 将余纤维性对象之间的所有弱等价变为弱等价. 对偶地, 若 F 将纤维性对象之间的平凡纤维化变为弱等价, 则 F 将纤维性对象之间的所有弱等价变为弱等价.

证明. 只证余纤维性对象的情形. 设 $f: A \rightarrow B$ 是余纤维性对象之间的弱等价, 并记余积的两个包含为

$$\iota_A: A \longrightarrow A \sqcup B, \quad \iota_B: B \longrightarrow A \sqcup B.$$

它们都是余纤维化, 且 $A \sqcup B$ 仍是余纤维性对象. 将 $(f, \text{id}_B): A \sqcup B \rightarrow B$ 分解为

$$A \sqcup B \xrightarrow{k} T \xrightarrow{p} B, \quad k \in \text{Cof}, \quad p \in \text{Fib} \cap W.$$

对象 T 是余纤维性的. 由

$$pk\iota_A = f, \quad pk\iota_B = \text{id}_B$$

以及 3 选 2 性质可知 $k\iota_A$ 与 $k\iota_B$ 都是平凡余纤维化. 因而 $F(k\iota_A)$ 与 $F(k\iota_B)$ 都是 $\mathcal{D}$ 中的弱等价. 再由 $F(p)F(k\iota_B) = \text{id}_{F(B)}$ 和 3 选 2 性质得到 $F(p)$ 是弱等价, 最后 $F(f) = F(p)F(k\iota_A)$ 也是弱等价. 纤维性对象的结论由对偶论证得到. $\square$

2.3.1 Quillen 伴随与 Quillen 等价

模型结构不只是让我们能够计算单个同伦范畴, 它还告诉我们哪些伴随在局部化以后仍然有意义. 这正是比较不同点集模型时最常用的工具.

定义 2.3.12. (Quillen 伴随) 设 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ 为两个模型范畴之间的伴随. 若左伴随 F 保持余纤维化和平凡余纤维化, 则称 (F, G) 为一个 **Quillen 伴随**, 称 F 为左 Quillen 函子, G 为右 Quillen 函子.

等价地, G 保持纤维化和平凡纤维化. 这个等价刻画直接来自伴随与提升性质之间的对应, 参见 [Hovey, Lemma 1.3.4].

Ken Brown 引理说明, 左 Quillen 函子保持余纤维性对象之间的弱等价, 右 Quillen 函子保持纤维性对象之间的弱等价. 因此在选取替换以后可以定义导出函子

$$\mathbf{L}F(X) = F(QX), \quad \mathbf{R}G(Y) = G(RY),$$

并得到同伦范畴之间的导出伴随

$$\mathbf{L}F: \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{D}): \mathbf{R}G.$$

这里的表达式依赖替换的选择, 但所得导出函子在相差唯一自然同构的意义下不依赖这些选择.

定义 2.3.13. (Quillen 等价) Quillen 伴随 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ 称为 **Quillen 等价**, 如果对每个余纤维性对象 $X \in \mathcal{C}$ 、纤维性对象 $Y \in \mathcal{D}$ 以及一对伴随态射

$$f: F(X) \longrightarrow Y, \quad f^b: X \longrightarrow G(Y),$$

有 f 是弱等价当且仅当 f^b 是弱等价.

命题 2.3.14. Quillen 伴随是 Quillen 等价, 当且仅当其导出伴随

$$\mathbf{L}F: \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{D}): \mathbf{R}G$$

是伴随等价.

证明. 这是 [Hovey, Definition 1.3.12 and Proposition 1.3.13] 给出的判别. 它解释了“Quillen 等价”一词的真正含义: 两个模型范畴未必作为普通范畴等价, 但它们呈现同一个同伦论. $\square$

在同伦论中, 我们通常考虑带点空间, 因此我们应该研究模型范畴是否能够诱导带点范畴上的模型结构:

定义 2.3.15. (带点范畴) **带点范畴**指带有零对象的范畴.

对于模型范畴 $\mathcal{C}$, 考虑其终对象 $*$, 则仰范畴 $\mathcal{C}_*/$ 为带点范畴, 称为 $\mathcal{C}$ 的带点对象范畴, 记为 $\mathcal{C}_*$. 其中对象 $(* \xrightarrow{v} X) \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ 简记为 (X, v) , 其中 v 称为 X 的基点, $\mathcal{C}_*$ 的态射即保持基点的态射.

注意到 $\mathcal{C}_*$ 具有任意极限与余极限. 给定图表 $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}_*$, 其极限即为 $\tilde{F}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ 的极限. 而余极限的刻画稍显复杂. 考虑锥 $\mathcal{J}^\Delta$ (它是 $\mathcal{J}$ 配上一个额外的始对象 $*$), 则 F 诱导函子 $G: \mathcal{J}^\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ 其中 $G(*) = *$ 且 $* \rightarrow i$ 对应于 $F(i)$ 的基点, 则 G 在 $\mathcal{C}$ 中的余极限自然地带有基点, 记为 F 在 $\mathcal{C}_*$ 的余极限.

例 2.3.16. • 空图表在 $\mathcal{C}_*$ 的极限和余极限均为 $*$, 因此 $\mathcal{C}_*$ 确为带点范畴.

• X 和 Y 的余积为 $X \vee Y$, 即为 $X \sqcup Y$ 商去基点.

有显然的函子 $(-)_+: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_*$ 给 X 附上基点 $X_+ = X \sqcup *$. 它是遗忘函子 $U: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}$ 的左伴随. 若 $\mathcal{C}$ 已然带点, 则 $(-)_+$ 给出 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{C}_*$ 的范畴等价.

命题 2.3.17. 若 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, 对于 $f \in \text{Mor}(\mathcal{C}_*)$, 称 f 为余纤维化 (或纤维化, 弱等价) 指其在遗忘函子下的像 Uf 为 $\mathcal{C}$ 中的余纤维化 (或纤维化, 弱等价). 这给出 $\mathcal{C}_*$ 上的模型结构.

证明. [Hovey, Proposition 1.1.8.]. □

更进一步, 我们可以把终对象 $*$ 换为一般的对象 $A \in \mathcal{C}$, 上述命题可以被扩张到一般的俯仰范畴之上.

注记 2.3.18. 例如, 对任一配有标准模型结构的适用空间范畴应用上述命题, 都可得到相应的带点空间模型结构.

§ 2.4 同伦、Whitehead 定理与局部化

现在回到模型结构如何计算局部化这一问题. 我们将先在双纤维性对象之间定义可操作的同伦关系, 再把所得商范畴与第 2.1.3 节的抽象局部化比较.

首先进行一些记号上的回顾与设置, 记 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ 为将 $\mathcal{C}$ 视为弱等价范畴时所得到的同伦范畴. 记 $\mathcal{C}_c$ (或 $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}^\circ$) 为由 $\mathcal{C}$ 中的余纤维性对象 (或纤维性对象, 双纤维性对象) 所张成的全子范畴, 此时其内弱等价定义为在包含函子的像为弱等价的态射, 记为 $\mathcal{W}_c$ (或 $\mathcal{W}_f, \mathcal{W}^\circ$).

命题 2.4.1. 令 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, 则包含函子诱导范畴等价 $\mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}_c[\mathcal{W}_c^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ 和 $\mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}_f[\mathcal{W}_f^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

证明. 参见 [Hovey, Proposition 1.2.3.]. □

因此我们只需要研究 $\mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}]$ 这一同伦范畴即可. 在 $\mathcal{C}$ 局部小的前提下, 我们将给出它的局部小模型, 从而能够具体描述态射集.

在拓扑空间的熟悉例子中, 同伦范畴的态射是连续映射模映射同伦所得的类, 而同伦等价在这个商范畴中变成同构. 这启发我们在一般模型范畴中分别定义映射同伦与同伦等价.

以紧生成弱 Hausdorff 空间所成的适用空间范畴 (在此例中仍记作 $\mathbf{Top}$) 为例, 对两个态射 $f, g: X \rightarrow Y$, 左、右两种映射同伦分别由下列图表中的 H 给出:

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ \delta_0 \downarrow & \searrow f & \uparrow p_0 \\ X \times I & \xrightarrow{H} & Y^I \\ \delta_1 \uparrow & \nearrow g & \downarrow p_1 \\ X & & Y \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \uparrow p_0 \\ X & \xrightarrow{H} & Y^I \\ & \searrow g & \downarrow p_1 \\ & & Y \end{array}$$

交换的 H , 此外我们称左侧图表为左同伦, $X \times I$ 为柱对象, 而右侧图表为右同伦, Y^I 为路径对象. 接下来我们将试着使用模型范畴的公理来恢复左右同伦的概念.

定义 2.4.2. (模型范畴的同伦) 设 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, $X, Y \in \mathcal{C}$ 为两个对象, 且有两个态射 $f, g: X \rightarrow Y$, 则

- X 的柱对象, 记作 $\text{Cyl}(X)$, 指余对角态射 $\nabla_X = (\text{id}_X, \text{id}_X): X \sqcup X \rightarrow X$ 的分解

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla_X} & X \\ \text{Cof} \ni (\delta_0, \delta_1) \searrow & & \nearrow p \in W \\ & \text{Cyl}(X) & \end{array}$$

此外, 若还满足 $p \in W \cap \text{Fib}$, 则称此柱对象是好的.

- 从 f 到 g 的左同伦是使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ \delta_0 \downarrow & \searrow f & \\ \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{H} & Y \\ \delta_1 \uparrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

交换的态射 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$. 此时称 f 左同伦于 g , 简记为 $f \stackrel{l}{\sim} g$.

- Y 的路径对象, 记作 $\text{Path}(Y)$, 指对角态射 $\Delta_Y: Y \rightarrow Y \times Y$ 的分解

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & Y \times Y \\ \text{W} \ni i \searrow & & \nearrow (p_0, p_1) \in \text{Fib} \\ & \text{Path}(Y) & \end{array}$$

若还满足 $i \in W \cap \text{Cof}$, 则称该路径对象是好的.

- 从 f 到 g 的右同伦是使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \uparrow p_0 \\ X & \xrightarrow{H} \text{Path}(Y) & \\ & \searrow g & \downarrow p_1 \\ & & Y \end{array} \cdot$$

交换的态射 $H: X \rightarrow \text{Path}(Y)$. 此时称 f 右同伦于 g , 简记为 $f \stackrel{r}{\sim} g$.

- 若 f 与 g 即为左同伦又为右同伦, 则称它们是同伦的, 简记为 $f \sim g$.
- 称 f 是同伦等价, 指存在 $h: Y \rightarrow X$ 使得 $hf \sim \text{id}_X$ 且 $fh \sim \text{id}_Y$.

我们可以给出一些简单的性质 (大致来自 [QuiHA, Lemma 1.1.1.-1.1.5.]), 此处我们不跳过证明以让读者熟悉模型范畴的运作方式.

命题 2.4.3. 令 $\mathcal{C}$ 为模型范畴, 且 $f, g: X \rightarrow Y$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射.

1. 考虑 $h: Y \rightarrow Z$, 若 $f \stackrel{l}{\sim} g$, 则 $hf \stackrel{l}{\sim} hg$. 对偶地, 若 $f \stackrel{r}{\sim} g$, 考虑 $h: T \rightarrow X$, 则 $fh \stackrel{r}{\sim} gh$.
2. 若 Y 为纤维性对象, $f \stackrel{l}{\sim} g$ 且 $h: T \rightarrow X$, 则 $fh \stackrel{l}{\sim} gh$. 对偶地, 若 X 为余纤维性对象, $f \stackrel{r}{\sim} g$ 且 $h: Y \rightarrow Z$, 则 $hf \stackrel{r}{\sim} hg$.
3. 若 X 余纤维性, 则左同伦为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 上的等价关系, 若 Y 纤维性, 则右同伦为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 上的等价关系.
4. 若 X 余纤维性, 且 $h: Y \rightarrow Z$ 为平凡纤维化, 则 h 诱导同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \stackrel{l}{\sim} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) / \stackrel{l}{\sim}$$

对偶地, 可以得到 Y 纤维性, $h: T \rightarrow X$ 为平凡余纤维化的版本.

5. 若 X 余纤维性, 则 $f \stackrel{l}{\sim} g$ 可以推知 $f \stackrel{r}{\sim} g$. 此外, 考虑 Y 的道路对象 $\text{Path}(Y)$, 则存在右同伦 $K: X \rightarrow \text{Path}(Y)$. 对偶地, 可以得到 Y 纤维性且 $f \stackrel{r}{\sim} g$ 的情况.

证明. 只证明给定左同伦的情况, 对偶情况完全类似.

1. 令左同伦为态射 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$, 则 $hH: \text{Cyl}(X) \rightarrow Z$ 为 hf 到 hg 的左同伦.
2. 因 $f \stackrel{l}{\sim} g$, 不妨令 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ 为其同伦, 其中 $\text{Cyl}(X)$ 为某个柱对象, 因此有分解 $X \sqcup X \xrightarrow{n \in \text{Cof}} \text{Cyl}(X) \xrightarrow{p \in W} X$, 根据模型范畴公理 $\text{Cyl}(X) \xrightarrow{p} X$ 可以分解为 $\text{Cyl}(X) \xrightarrow{i \in \text{Cof}} \text{Cyl}'(X) \xrightarrow{j \in W \cap \text{Fib}} X$, 而因 p 为弱等价, 因此 i 为平凡余纤维

化, 此时 $X \sqcup X \xrightarrow{ion \in \text{Cof}} \text{Cyl}'(X) \xrightarrow{j \in \text{WnFib}} X$ 将 $\text{Cyl}'(X)$ 变为好柱对象, 我们断言 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ 可以延拓为 $H': \text{Cyl}'(X) \rightarrow Y$. 这只需要考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(X) & \longrightarrow & Y \\ \text{WnCof} \ni i \downarrow & \nearrow & \downarrow \in \text{Fib} \\ \text{Cyl}'(X) & \longrightarrow & * \end{array}$$

由模型范畴公理可知 $(\text{W} \cap \text{Cof}, \text{Fib})$ 为弱分解系统, 根据弱分解系统定义以及 Y 为纤维性对象可知提升存在. 因此左同伦总是可以来自于一个好的柱对象. 下文把 $\text{Cyl}'(X)$ 重记为 $\text{Cyl}(X)$, 并仍以 H' 表示延拓后的同伦. 现在考虑 T 的柱对象 $\text{Cyl}(T)$ 以及图表

$$\begin{array}{ccc} T \sqcup T & \longrightarrow & \text{Cyl}(X) \\ \text{Cof} \ni \downarrow & \nearrow & \downarrow \in \text{WnFib} \\ \text{Cyl}(T) & \longrightarrow & X \end{array}$$

立刻得到提升的存在性, 记为 $k: \text{Cyl}(T) \rightarrow \text{Cyl}(X)$, 则 $H' \circ k: \text{Cyl}(T) \rightarrow Y$ 给出 fh 到 gh 的左同伦.

反性. 考虑柱对象 $X \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}(X) \xrightarrow{s} X$, 因此 $\text{Cyl}(X) \xrightarrow{s} X \xrightarrow{f} Y$ 给出 f 到 f 的左同伦.

对称性. 考虑 f 到 g 的左同伦

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_0} \text{Cyl}(X) \xleftarrow{\delta_1} & X \\ & \searrow f \quad \downarrow H \quad \swarrow g & \\ & & Y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta'_0} \text{Cyl}'(X) \xleftarrow{\delta'_1} & X \\ & \searrow g \quad \downarrow H' \quad \swarrow f & \\ & & Y \end{array}$$

将 δ_0 与 δ_1 调换顺序后得到 g 到 f 的左同伦 H .

传递性. 令 $f, g, h: X \rightarrow Y$ 且 f 左同伦于 g , g 左同伦于 h , 则可以得到以下图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_0} \text{Cyl}(X) \xleftarrow{\delta_1} & X \\ & \searrow f \quad \downarrow H_1 \quad \swarrow g & \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta'_0} \text{Cyl}'(X) \xleftarrow{\delta'_1} & X \\ & \searrow g \quad \downarrow H_2 \quad \swarrow h & \\ & & Y \end{array}$$

将两个同伦在共同的端点 g 处粘合, 即考虑沿 δ_1 与 δ'_0 形成的推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Cyl}(X) \\ \delta'_0 \downarrow & & \downarrow \text{in}_1 \\ \text{Cyl}'(X) & \xrightarrow{\text{in}_2} & \text{Cyl}''(X) \end{array},$$

记两个原柱对象的收缩态射为 p 与 p' . 因 X 余纤维性, 每个端点包含 δ_e, δ'_e 都是余纤维化; 又 $p\delta_e = p'\delta'_e = \text{id}_X$ 且 p, p' 为弱等价, 所以这些端点包含都是平凡余纤维化. 推出稳定性于是说明 in_1 与 in_2 也是平凡余纤维化. 由 $p\delta_1 = p'\delta'_0$ 及推出泛性质, p 与 p' 诱导

$$p'': \text{Cyl}''(X) \longrightarrow X.$$

因 $p'' \text{in}_1 = p$ 且 in_1, p 均为弱等价, 3 选 2 性质给出 p'' 为弱等价. 令

$$j_0 = \text{in}_1 \delta_0, \quad j_1 = \text{in}_2 \delta'_1.$$

这里不能只由 j_0, j_1 各自是余纤维化, 就断言它们合成的态射 $(j_0, j_1): X \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}''(X)$ 仍是余纤维化. 因此再取一次模型分解

$$X \sqcup X \xrightarrow{i} \widetilde{\text{Cyl}}(X) \xrightarrow{r} \text{Cyl}''(X), \quad i \in \text{Cof}, \quad r \in \text{W} \cap \text{Fib}.$$

复合 $p''r: \widetilde{\text{Cyl}}(X) \rightarrow X$ 是弱等价, 且它在 i 的两个端点上都是 id_X , 所以 $\widetilde{\text{Cyl}}(X)$ 是 X 的柱对象. 最后, $H_1 \delta_1 = g = H_2 \delta'_0$, 因而 H_1 与 H_2 先诱导 $H: \text{Cyl}''(X) \rightarrow Y$; 再与 r 复合便得到以 f, h 为端点的左同伦 $Hr: \widetilde{\text{Cyl}}(X) \rightarrow Y$. 这给出了传递性.

4. 由于 X 余纤维性, 因此根据 3. 可知 $\sim^l$ 确实为等价关系, 而后由 1. 可以给出映射

$$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \sim^l \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) / \sim^l,$$

接下来我们证明 F 为双射, 首先说明其为满射, 对于 $f': X \rightarrow Z$, 因 X 是余纤维性对象, 而 h 为平凡纤维化, 因此考虑左图

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \text{Cof} \Downarrow & \nearrow & \downarrow h \in \text{W} \cap \text{Fib} \\ X & \xrightarrow{f'} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{(f, g)} & Y \\ \text{Cof} \Downarrow & \nearrow & \downarrow h \in \text{W} \cap \text{Fib} \\ \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{H'} & Z \end{array}$$

可知提升存在性, 因此总是存在 f 使得 $hf = f'$, 因此在不作为商集时即为满射. 接下来证明单射, 若 $hf \sim^l hg$, 此时可以给出 $H': \text{Cyl}(X) \rightarrow Z$ 为 hf 到 hg 的左同伦, 因此考虑右图, 不难发现这确实是从 f 到 g 的左同伦.

5. 若 X 余纤维性且 $f \sim^l g$ 同伦由 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ 给出, 此处记柱对象到 X 的典范态射为 p , 从而由与 3. 一样的论证可知 $\delta_0: X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ 为平凡余纤维化, 考虑 Y 的道路对象 $Y \xrightarrow{i \in \text{W}} \text{Path}(Y) \xrightarrow{(p_0, p_1) \in \text{Fib}} Y \times Y$, 因此考虑图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{if} & \text{Path}(Y) \\ \text{W} \cap \text{Cof} \Downarrow \delta_0 & \nearrow & \downarrow (p_0, p_1) \in \text{Fib} \\ \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{(fp, H)} & Y \times Y \end{array}$$

可知提升存在, 记为 $K: \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Path}(Y)$, 不难发现 $K\delta_1$ 为所求的右同伦.

□

不难发现, 若我们想用同伦类组成一个范畴, 就需要同伦是等价关系并且在复合下稳定. 根据命题 2.4.3, 在双纤维性对象构成的全子范畴中这些条件都成立.

推论 2.4.4. 在全子范畴 C° 中, 同伦关系为可复合的等价关系. 因此可以考虑 $C^\circ / \sim$, 其中 $\sim$ 表示同伦.

为了把 $C^\circ / \sim$ 与局部化联系起来, 首先比较双纤维性对象之间的同伦等价与弱等价.

定理 2.4.5. (Whitehead) 令 C 为模型范畴, 则双纤维性对象之间的弱等价即为同伦等价.

证明. 先设 $f: A \rightarrow B$ 是双纤维性对象之间的弱等价. 将它分解为

$$A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} B, \quad i \in \text{Cof}, \quad p \in \text{W} \cap \text{Fib}.$$

由 3 选 2 性质, i 也是弱等价, 因而是平凡余纤维化. 又因为 A 余纤维性且 B 纤维性, C 也同时余纤维性和纤维性.

我们先说明双纤维性对象之间的平凡纤维化是同伦等价. 若 $p: C \rightarrow B$ 是这样的态射, 则由 B 的余纤维性可在

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array}$$

中提升, 得到 $ps = \text{id}_B$. 取 C 的好柱对象

$$C \sqcup C \xrightarrow{(j_0, j_1)} \text{Cyl}(C) \xrightarrow{q} C.$$

因 C 余纤维性, 左边的态射是余纤维化; 于是下图中的提升给出从 sp 到 id_C 的左同伦:

$$\begin{array}{ccc} C \sqcup C & \xrightarrow{(sp, \text{id}_C)} & C \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ \text{Cyl}(C) & \xrightarrow{pq} & B. \end{array}$$

双纤维性保证左右同伦一致, 所以 s 是 p 的同伦逆. 对偶地, 双纤维性对象之间的平凡余纤维化也是同伦等价. 因此上面的 i 与 p 都是同伦等价, 它们的复合 f 也是同伦等价.

反过来, 设 $f: A \rightarrow B$ 是双纤维性对象之间的同伦等价. 将 f 分解为平凡余纤维化 $i: A \rightarrow C$ 后接纤维化 $p: C \rightarrow B$. 如上, C 仍是双纤维性对象, 而已经证明的方向说明 i 是同伦等价. 取 f 的同伦逆 $f': B \rightarrow A$ 以及从 ff' 到 id_B 的左同伦 $H: \text{Cyl}(B) \rightarrow B$. 取好柱对象时, 端点包含 $j_0: B \rightarrow \text{Cyl}(B)$ 是余纤维化, 故下图有提升:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{if'} & C \\ j_0 \downarrow & \nearrow H' & \downarrow p \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

令 $s = H'j_1: B \rightarrow C$. 则 $ps = \text{id}_B$, 且 $s \sim if'$. 再取 i 的同伦逆 $i': C \rightarrow A$. 由同伦与复合的相容性,

$$p \sim pii' = fi', \quad sp \sim if'p \sim if'fi' \sim ii' \sim \text{id}_C.$$

最后说明 sp 是弱等价. 若 $K: \text{Cyl}(C) \rightarrow C$ 是从 id_C 到 sp 的左同伦, 则柱对象的两个端点包含 $j_0, j_1: C \rightarrow \text{Cyl}(C)$ 都是弱等价. 从 $Kj_0 = \text{id}_C$ 先由 3 选 2 性质得到 $K \in \mathcal{W}$, 再由 $Kj_1 = sp$ 得到 $sp \in \mathcal{W}$. 由于 $ps = \text{id}_B$, 态射 p 在箭头范畴中是 sp 的收缩核; 模型范畴中的弱等价对收缩核封闭, 故 $p \in \mathcal{W}$. 于是 $f = pi$ 也是弱等价.

这正是 [Hovey, Proposition 1.2.8] 的论证. $\square$

因此我们知道

定理 2.4.6. 对于局部小的模型范畴 $\mathcal{C}$, 有范畴等价

$$\mathcal{C}^\circ / \sim \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}].$$

特别地, $\mathcal{C}$ 的同伦范畴是局部小范畴.

证明. 记商函子为 $\pi: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}^\circ / \sim$, 局部化函子为 $\ell: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}]$. 先说明 ℓ 把同伦的态射映为相同态射. 若 $f, g: X \rightarrow Y$ 之间的左同伦由 $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ 给出, 记柱对象的端点包含为 δ_0, δ_1 、收缩为 q . 因 $q\delta_0 = q\delta_1 = \text{id}_X$ 且 $q \in \mathcal{W}$, 在局部化中有

$$\ell(\delta_0) = \ell(q)^{-1} = \ell(\delta_1), \quad \ell(f) = \ell(H)\ell(\delta_0) = \ell(H)\ell(\delta_1) = \ell(g).$$

在双纤维性对象之间左右同伦一致, 因此 ℓ 经由 π 唯一分解出函子

$$\bar{\ell}: \mathcal{C}^\circ / \sim \longrightarrow \mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}].$$

另一方面, Whitehead 定理说明每个 $w \in \mathcal{W}^\circ$ 都有同伦逆, 所以 $\pi(w)$ 是同构. 由局部化的泛性质, π 唯一分解出

$$\bar{\pi}: \mathcal{C}^\circ[(\mathcal{W}^\circ)^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}^\circ / \sim.$$

两个分解的唯一性表明 $\bar{\ell}$ 与 $\bar{\pi}$ 在相差自然同构的意义下互逆, 这给出第一个等价; 这也是 [Hovey, Corollary 1.2.9] 的内容.

第二个等价由包含 $\mathcal{C}^\circ \hookrightarrow \mathcal{C}$ 诱导. 每个对象都通过余纤维性替换与纤维性替换得到一个双纤维性对象以及连接二者的弱等价, 这给出局部化后的本质满性; 其余的全忠实性与泛性质见命题 2.4.1, 即 [Hovey, Proposition 1.2.3]. 局部小性则来自第一个商范畴的态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \sim$. $\square$

最后要把本章的层级说清楚. 上述定理计算的是普通同伦范畴; 它并不意味着局部化的映射空间都是离散的. 若以 $(\mathcal{C}, \mathcal{W})_\infty$ 表示保留全部同伦相容性资料的高阶局部化, 则有

$$\text{Ho}(\mathcal{C}) \simeq h((\mathcal{C}, \mathcal{W})_\infty),$$

第 2 章 抽象同伦论

右侧的 h 表示取同伦范畴, 也就是只保留映射空间的连通分支. 要恢复完整映射空间, 还需使用单纯局部化、杠局部化或其他等价构造. 下一章的 Kan-Quillen、Joyal 与 Bergner 模型正好把这层高阶资料具体呈现出来.

第3章

单纯集与模型结构

- 单纯集只有一个很朴素的定义：它是一串集合，配上面与退化运算。但同一个范畴 $\mathbf{sSet}$ 上可以放置不同的弱等价类，于是它能够讲述两种不同的故事。Kan-Quillen 模型结构把单纯集看成空间，Joyal 模型结构则把单纯集看成范畴。
- 本章先把单纯集本身讲清楚，再讨论几何实现-奇异复形伴随以及 Kan-Quillen 模型结构。随后我们转向拟范畴与 Joyal 模型结构，最后引入单纯范畴上的 Bergner 模型结构以及取道路范畴-同伦脉伴随。
- 贯穿本章的原则仍然是：模型结构是计算同伦论的点集工具，真正与选择无关的是把弱等价局部化以后得到的高阶范畴。nLab 的导论沿着“拓扑同伦论-抽象模型范畴-经典空间模型”组织材料 [nLab-IHT]; 我们在这条路线之上再加入范畴型的 Joyal 与 Bergner 呈现。

§ 3.1 从单形范畴到单纯集

3.1.1 单形范畴、面与退化

记

$$[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}, \quad n \geq 0.$$

这些有限非空全序集以及保序映射构成**单形范畴** Δ 。对 $0 \leq i \leq n$ ，有两类基本态射：

$$\begin{aligned} \delta^i: [n-1] &\longrightarrow [n], & \text{其像略去 } i; \\ \sigma^i: [n+1] &\longrightarrow [n], & \text{它把 } i \text{ 与 } i+1 \text{ 映到同一点.} \end{aligned}$$

前者称为**余面态射**，后者称为**余退化态射**。任意 Δ 中的态射都能唯一分解为一个满射后接一个单射，因而这些态射确实生成了整个单形范畴。

定义 3.1.1. (单纯集) 单纯集是函子

$$X_{\bullet}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set},$$

不强调分次时仍将其简记为 X . 全体单纯集及其自然变换构成范畴 $\mathbf{sSet}$. 记

$$X_n = X([n]), \quad d_i = X(\delta^i): X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad s_i = X(\sigma^i): X_n \rightarrow X_{n+1}.$$

X_n 的元素称为 X 的 n -单形; d_i 与 s_i 分别称为第 i 个面运算与退化运算.

把函子性展开, 就得到熟悉的单纯恒等式:

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i & (i < j), \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i & (i \leq j), \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j, \\ \text{id}, & i = j \text{ 或 } i = j + 1, \\ s_j d_{i-1}, & i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

反过来, 给出集合 X_n 以及满足这些恒等式的 d_i, s_i , 也就给出了一个单纯集. 因而函子定义负责告诉我们结构从哪里来, 面-退化描述则负责实际计算.

若 $x \in X_n$ 落在某个 s_i 的像中, 就称 x 是退化单形; 否则称其为非退化单形. 退化单形并不是应当删去的冗余数据: 它们编码恒同态射, 并保证不同维数之间严格相容.

3.1.2 标准单形、边界与尖角

定义 3.1.2. (标准单形) 标准 n -单形是可表单纯集

$$\Delta^n = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n]).$$

Yoneda 引理给出自然双射

$$\text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X) \simeq X_n.$$

因此一个 n -单形既可以看成元素 $x \in X_n$, 也可以看成一个特征态射 $x: \Delta^n \rightarrow X$. 后一种写法特别适合讨论粘合与提升问题.

定义 3.1.3. (边界与尖角) 对 $n \geq 0$, 标准单形的边界 $\partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$ 是全部真面的并; 约定 $\partial\Delta^0 = \emptyset$. 逐度地说,

$$(\partial\Delta^n)_m = \{\alpha: [m] \rightarrow [n] \mid \alpha \text{ 不是满射}\}.$$

对 $n \geq 1$ 及 $0 \leq i \leq n$, 第 i 个尖角是

$$\Lambda_i^n = \bigcup_{j \neq i} \delta^j(\Delta^{n-1}) \subseteq \partial\Delta^n.$$

换言之, 它保留除第 i 个面以外的所有面. 当 $0 < i < n$ 时称为**内尖角**; 当 $i = 0$ 或 $i = n$ 时称为**外尖角**.

这里有一个容易画错的地方: Λ_i^n 是从边界中去掉第 i 个面, 不是去掉第 i 个顶点. 例如 Λ_1^2 给出两条首尾相接的边; 填入一个 2-单形, 就是在给这两条边指定复合以及见证复合的二维资料.

边界还说明单纯集如何逐层搭起来. 令 X_n^{nd} 为 X 的非退化 n -单形集合, 并约定 $\text{sk}_{-1} X = \emptyset$. 则对每个 $n \geq 0$, 下图是推出方块:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_n^{\text{nd}}} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_n^{\text{nd}}} \Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_n X. \end{array}$$

于是 $X \simeq \text{colim}_n \text{sk}_n X$: 单纯集就是把标准单形沿边界一层层粘起来所得的组合对象. 这也是几何实现会产生胞腔结构的根本原因. 上述基本材料可参见 [GJ09, Chapter I, §§1–2].

§ 3.2 从单纯集到空间

3.2.1 几何实现–奇异复形伴随

拓扑标准 n -单形为

$$|\Delta^n|_{\text{top}} = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

保序映射 $\alpha: [m] \rightarrow [n]$ 诱导仿射映射 $|\alpha|: |\Delta^m|_{\text{top}} \rightarrow |\Delta^n|_{\text{top}}$.

定义 3.2.1. (几何实现与奇异复形) 单纯集 X 的**几何实现**是商空间

$$|X| = \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|_{\text{top}} \right) / \sim,$$

其中对 $\alpha: [m] \rightarrow [n]$, $x \in X_n$ 及 $t \in |\Delta^m|_{\text{top}}$, 施加关系

$$(X(\alpha)(x), t) \sim (x, |\alpha|(t)).$$

拓扑空间 Y 的**奇异复形** $\text{Sing}(Y)$ 定义为

$$\text{Sing}(Y)_n = \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^n|_{\text{top}}, Y),$$

面与退化由预合成给出.

命题 3.2.2. (几何实现–奇异复形伴随) 有伴随

$$|-|: \mathbf{sSet} \begin{matrix} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow{\text{Sing}} \end{matrix} \mathbf{Top},$$

即存在自然双射

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \text{Sing } Y).$$

证明. X 是它的全部标准单形的余极限, 而 $|X|$ 按定义把同一个余极限送入拓扑空间. 对每个标准单形应用 Yoneda 引理, 再使用“从余极限出发的态射等于一族相容态射”, 就得到所述自然双射. 这也解释了为什么实现公式中的商关系恰好是面–退化关系. $\square$

把上一节的骨架推出逐项实现, 可见 $|X|$ 由每个非退化 n -单形贡献的一个 n -胞腔逐层粘成. 特别地, 每个单纯集的几何实现自然是 CW 复形 [GJ09, Proposition I.2.3]. 这句话只描述实现的胞腔结构, 并不表示单纯集与 CW 复形在普通范畴意义下互为逆构造; 真正的对应要等到指定弱等价以后才成立.

3.2.2 Kan 复形

尖角把同伦延拓问题变成了纯组合的提升问题.

定义 3.2.3. (Kan 纤维化与 Kan 复形) 单纯集态射 $p: X \rightarrow Y$ 称为 **Kan 纤维化**, 如果它对所有尖角包含

$$\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq i \leq n,$$

具有右提升性质. 显式地说, 每个实线交换图都有虚线提升:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

若 $X \rightarrow \Delta^0$ 是 Kan 纤维化, 就称 X 为 **Kan 复形**.

命题 3.2.4. 对任意拓扑空间 Y , 奇异复形 $\text{Sing}(Y)$ 都是 Kan 复形. 更一般地, 连续映射 $p: E \rightarrow B$ 是 Serre 纤维化, 当且仅当 $\text{Sing}(p)$ 是 Kan 纤维化.

证明. 伴随把 $\Lambda_i^n \rightarrow \text{Sing}(Y)$ 变成 $|\Lambda_i^n| \rightarrow Y$. 几何尖角 $|\Lambda_i^n| \subseteq |\Delta^n|$ 是强形变收缩核, 因而前一映射可沿一个收缩延拓到 $|\Delta^n|$, 再经伴随转回即得尖角填充. 相对版本正是 Serre 纤维化的提升性质; 详见 [GJ09, Chapter I, §3]. $\square$

Kan 条件要求内、外尖角全部可填. 内尖角控制复合, 外尖角则控制逆. 对经典 1-范畴 $\mathcal{C}$, 其脉

$$N(\mathcal{C})_n = \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], \mathcal{C})$$

总有唯一的内尖角填充, 而 $N(\mathcal{C})$ 是 Kan 复形当且仅当 $\mathcal{C}$ 是群胚. 稍后定义拟范畴后, 我们会把这个观察写成高阶版本.

3.2.3 Kan-Quillen 模型结构

现在可以把上一章的抽象模型结构放到 $\mathbf{sSet}$ 上. 下述模型结构也常被称为 Quillen-Kan 模型结构.

定理 3.2.5. (Kan-Quillen 模型结构) 在 $\mathbf{sSet}$ 中指定以下三类态射可构成一个余纤维生成的模型结构:

1. 余纤维化是逐度单射, 也就是单纯集的单态射;
2. 纤维化是 Kan 纤维化;
3. 弱等价是满足 $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ 为弱同伦等价的态射 $f: X \rightarrow Y$.

一组生成余纤维化与生成平凡余纤维化分别是

$$I_{\text{KQ}} = \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n \geq 0}, \quad J_{\text{KQ}} = \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n \geq 1, 0 \leq i \leq n}.$$

证明. 这是 Kan-Quillen 模型结构定理; 可参见 [GJ09, Theorem I.11.3] 或 [Hovey, Theorem 3.6.5]. 这里不重复小对象论证与最小纤维化的技术细节. $\square$

由于 $\emptyset \rightarrow X$ 总是单态射, 每个单纯集都是余纤维性对象. 纤维性对象恰为 Kan 复形, 所以双纤维性对象也恰为 Kan 复形. 对 Kan 复形之间的态射, 弱等价还可以由 π_0 以及各基点处的所有同伦群 π_n 检测. 因而 Kan-Quillen 模型结构确实是一个纯组合的空间模型.

3.2.4 与方便拓扑空间的对照

直接在全体拓扑空间上做范畴论时, 映射空间与乘积的行为并不总够好. 因此我们把工作环境取为紧生成弱 Hausdorff 空间的范畴 $\mathbf{Top}_{\text{cgwh}}$. 它仍包含通常遇到的 CW 复形、流形与度量空间, 同时又是适合讨论映射空间的方便范畴.

定理 3.2.6. (拓扑空间的经典模型结构) $\mathbf{Top}_{\text{cgwh}}$ 上有经典模型结构, 其中

1. 弱等价是弱同伦等价;
2. 纤维化是 Serre 纤维化;
3. 余纤维化是对所有平凡 Serre 纤维化具有左提升性质的态射.

可取

$$\{S^{n-1} \hookrightarrow D^n\}_{n \geq 0} \quad \text{和} \quad \{D^n \times \{0\} \hookrightarrow D^n \times I\}_{n \geq 0}$$

分别作为生成余纤维化与生成平凡余纤维化, 其中约定 $S^{-1} = \emptyset$.

这正是紧生成弱 Hausdorff 空间上的经典模型结构; 模型范畴公理与生成集的验证见 [Hovey, Theorem 2.4.25].

所有方便拓扑空间都是纤维性对象. 余纤维性对象则是由圆盘粘合所得的胞腔对象的收缩核; 特别地 CW 复形是余纤维性的. 这里必须保留“收缩核”三个字: 我们并没有声称每个余纤维性对象本身恰好就是某个 CW 复形. 这些陈述及方便空间范畴之间的比较见 [Hovey, §2.4].

定理 3.2.7. (单纯集与空间的 Quillen 等价) 几何实现-奇异复形伴随限制为 Quillen 等价

$$|-|: \mathbf{sSet}_{\mathbf{KQ}} \xrightleftharpoons[\mathrm{Sing}]{} \mathbf{Top}_{\mathrm{cgwh}}.$$

对任意单纯集 X 与方便拓扑空间 Y , 单位与余单位

$$X \longrightarrow \mathrm{Sing} |X|, \quad |\mathrm{Sing} Y| \longrightarrow Y$$

分别是 Kan-Quillen 弱等价与弱同伦等价.

证明. 参见 [GJ09, Theorem I.11.4] 以及 [Hovey, Theorem 3.6.7]. 后一参考文献先在 k -空间上给出此 Quillen 等价, 再由方便空间与 k -空间的 Quillen 等价得到上述版本. $\square$

两侧的点集行为并不对称, 但这恰好显示模型结构的用处:

	$\mathbf{sSet}_{\mathbf{KQ}}$	$\mathbf{Top}_{\mathrm{cgwh}}$
弱等价	实现后的弱同伦等价	弱同伦等价
纤维性对象	Kan 复形	所有对象
余纤维性对象	所有对象	胞腔对象的收缩核
方便之处	提升与粘合完全组化	几何直观与映射空间直接可见

取底层高阶范畴以后, 这两套点集资料都呈现空间的高阶范畴 $\mathcal{S}$. 因此“Kan 复形与空间相同”的准确含义是它们给出等价的同伦理论, 而不是两个普通范畴同构.

§ 3.3 从单纯集到范畴

3.3.1 普通脉与拟范畴

经典 1-范畴 $\mathcal{C}$ 的脉定义为

$$N(\mathcal{C})_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], \mathcal{C}).$$

一个 2-单形记录可复合的两条态射以及它们的复合, 一个 3-单形记录结合律. 更精确地说, 单纯集 X 是某个经典 1-范畴的脉, 当且仅当每个内尖角在 X 中都有唯一填充. 如果去掉唯一性, 复合就不再被迫严格选定, 而是连同全部高阶同伦相容性资料一起存在.

定义 3.3.1. (拟范畴) 单纯集 C 称为**拟范畴**, 如果对所有

$$\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n, \quad n \geq 2, \quad 0 < i < n,$$

都具有右提升性质. 也就是说, C 的每个内尖角都能填充, 但填充一般不唯一.

在拟范畴中, 0-单形是对象, 1-单形是态射, 内 2-尖角填充给出复合的选择; 不同选择之间由更高单形联系, 而高维内尖角继续提供全部同伦相容性. 外尖角没有被要求可填, 因为一般态射不应当可逆. 这正是拟范畴与 Kan 复形的分界.

对任意单纯集 K , 记 hK 为由顶点与边生成的经典 1-范畴: 把退化边规定为恒等态射, 再除以 2-单形给出的复合关系. 当 C 是拟范畴时, 若一条边在 hC 中的像为同构, 就称它是 C 中的**等价**.

命题 3.3.2. (Kan 复形是 ∞ -群胚) Kan 复形是拟范畴. 一个拟范畴是 Kan 复形, 当且仅当其中每条边都是等价. 因而 Kan 复形正是由单纯集呈现的 ∞ -群胚.

证明. Kan 条件当然蕴含内尖角填充. 反过来, 在拟范畴中, 外尖角填充所缺少的恰是边的左右逆及其高阶同伦相容性; 当每条边都是等价时, 这些填充全部存在. 精确证明见 [HTT, Proposition 1.2.5.1]. $\square$

3.3.2 Joyal 模型结构

要把任意单纯集先替换为拟范畴, 我们需要换掉 Kan–Quillen 模型结构中的弱等价与纤维化. 为了精确定义新的弱等价, 记

$$\mathrm{Fun}(A, C)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(A \times \Delta^n, C)$$

为单纯集的内部函子对象.

定义 3.3.3. (弱范畴等价) 单纯集态射 $f: A \rightarrow B$ 称为**弱范畴等价**, 如果对每个拟范畴 C , 限制函子

$$h\mathrm{Fun}(B, C) \longrightarrow h\mathrm{Fun}(A, C)$$

都是经典 1-范畴的等价.

当 A, B 本身已经是拟范畴时, 这个定义就是高阶范畴意义下的等价; 它同时检测对象是否本质满以及映射空间是否等价. 这里不把它叫作弱同伦等价, 因为这两类弱等价确实不同.

定理 3.3.4. (Joyal 模型结构) $\mathbf{sSet}$ 上存在左恰当、组合的模型结构, 满足:

1. 余纤维化仍是单态射;
2. 弱等价是弱范畴等价;
3. 纤维化是对所有既为单态射又为弱范畴等价的态射具有右提升性质的态射;
4. 纤维性对象恰为拟范畴.

这称为 **Joyal 模型结构**, 记作 $\mathbf{sSet}_J$.

证明. 这是 Joyal 的模型结构定理; 本处采用的弱范畴等价刻画与模型结构中的范畴等价相同. 参见 [HTT, Theorem 2.2.5.1 and Proposition 2.2.5.8]. $\square$

这里第三条不能随手改写成“纤维化就是内纤维化”. 更精确地, 若 $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是拟范畴之间的态射, 那么 p 是 Joyal 纤维化, 当且仅当它同时满足:

1. p 是内纤维化;
2. 对任意 $x \in \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{D}$ 中从 $p(x)$ 出发的等价 $e: p(x) \rightarrow y$, 都存在 $\mathcal{C}$ 中从 x 出发的等价 $\tilde{e}: x \rightarrow x'$ 使得 $p(\tilde{e}) = e$.

第二条负责提升对象之间的等价. 只有在底为一点等特殊情形, 它才自动成立; 这也解释了为什么对终对象的 Joyal 纤维化条件恰好给出拟范畴. 参见 [HTT, Corollary 2.4.6.5].

所有单纯集在 Joyal 模型结构中仍然余纤维性. 每个内尖角包含都是平凡余纤维化, 但不要据此把 Joyal 平凡余纤维化简单等同于由内尖角生成的内零伦态射; 为了控制对象间的等价, 完整的平凡余纤维化类还含有额外资料.

注记 3.3.5. (同一个 $\mathbf{sSet}$, 两种不同的局部化) Kan–Quillen 与 Joyal 模型结构有相同的余纤维化, 但 Joyal 弱等价更少, 因而 Joyal 纤维性对象更多:

$$\{\text{Kan 复形}\} \subsetneq \{\text{拟范畴}\}.$$

最小的反例已经是

$$\Delta^1 \longrightarrow \Delta^0.$$

它在几何实现后是两个可缩空间之间的弱同伦等价, 所以是 Kan–Quillen 弱等价; 但 $[1] \rightarrow [0]$ 不是范畴等价, 所以它不是 Joyal 弱等价. 从与模型无关的角度看, Kan–Quillen 局部化是在 Joyal 所呈现的范畴论上进一步把每条态射都形式地变成可逆态射, 也就是取群胚化. 详见 [HTT, Remark 1.2.5.6].

特别地, $X \rightarrow \text{Sing } |X|$ 是 Kan–Quillen 纤维性替换, 并可视为把 X 中所有边自由变成可逆后的 ∞ -群胚; 除非 X 已经是群胚型的, 它通常不是 Joyal 弱等价. 这正说明“呈现空间”与“呈现范畴”不是同一句话的两种说法.

§ 3.4 单纯范畴与 Bergner 模型结构

3.4.1 单纯集充实范畴

拟范畴把全部资料放在一个单纯集中. 另一种做法则更接近经典范畴: 保留一组对象, 但把每个态射集合升级为一个空间模型.

定义 3.4.1. (单纯范畴) **单纯范畴**是充实于乘积么半范畴 $\mathbf{sSet}$ 的小范畴 $\mathcal{A}$. 换言之, 它包含:

- 一个对象集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$;
- 对每对对象 x, y , 一个映射单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$;
- 严格结合且有单位的复合态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, z).$$

小单纯范畴构成范畴 $\mathbf{sCat}$.

定义经典 1-范畴 $\pi_0\mathcal{A}$ 如下: 对象仍为 $\mathcal{A}$ 的对象, 而

$$\mathrm{Hom}_{\pi_0\mathcal{A}}(x, y) = \pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y).$$

一个顶点 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)_0$ 称为**同伦等价**, 如果其像在 $\pi_0\mathcal{A}$ 中为同构.

定义 3.4.2. (DK 等价) 单纯函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 称为 **Dwyer–Kan 等价**, 简称 **DK 等价**, 如果:

1. 对每对 $x, y \in \mathcal{A}$, 态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx, Fy)$$

是 Kan–Quillen 弱等价;

2. $\pi_0 F: \pi_0\mathcal{A} \rightarrow \pi_0\mathcal{B}$ 是经典 1-范畴的等价.

第一条已经保证 $\pi_0 F$ 在态射集上全忠实, 所以第二条也可以只说 $\pi_0 F$ 本质满. 这一定义把经典范畴等价的“全忠实加本质满”逐字升级: 全忠实不再是态射集合的双射, 而是映射空间的弱等价.

为了写出 Bergner 模型结构, 还需要把纤维化的对象条件说清楚.

定义 3.4.3. (Bergner 纤维化) 单纯函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 称为 **Bergner 纤维化**, 如果满足:

1. 对每对 $x, y \in \mathcal{A}$, 映射单纯集上的态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx, Fy)$$

是 Kan 纤维化;

2. 若 $x \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, 且 $e: Fx \rightarrow b$ 是 $\mathcal{B}$ 中的同伦等价, 则存在 $x' \in \mathcal{A}$ 与同伦等价 $d: x \rightarrow x'$, 使得

$$F(x') = b, \quad F(d) = e.$$

第二条是等价的提升条件. 只要求映射单纯集上的 Kan 纤维化是不够的, 因为那样无法控制对象在同伦等价下的提升.

定理 3.4.4. (Bergner 模型结构) $\mathbf{sCat}$ 上存在余纤维生成的模型结构, 其中

1. 弱等价是 DK 等价;
2. 纤维化是定义 3.4.3 中的态射;
3. 余纤维化由对平凡纤维化的左提升性质确定.

其纤维性对象恰为局部 **Kan** 的单纯范畴, 即每个 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y)$ 都是 Kan 复形.

证明. 模型结构的存在性以及上述两条纤维化条件见 [Ber07, Theorem 1.1]. 对终对象考察纤维化条件时, 第二条自动成立, 第一条则恰好要求全部映射单纯集为 Kan 复形, 因而得到最后一句. $\square$

3.4.2 取道路范畴—同伦脉伴随

普通脉用 $[n]$ 探测经典范畴. 对单纯范畴而言, $[n]$ 的态射集合太薄, 看不见复合之间的同伦; 应当把它换成一个带有全部同伦相容性资料的单纯范畴.

对 $0 \leq i \leq j \leq n$, 令

$$P_{i,j} = \{S \subseteq \{i, i+1, \dots, j\} \mid i, j \in S\},$$

并以包含关系排序. 定义单纯范畴 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$: 对象为 $0, \dots, n$, 且

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i, j) = \begin{cases} N(P_{i,j}), & i \leq j, \\ \emptyset, & i > j. \end{cases}$$

复合由子集取并给出. 当 $i < j$ 时, $N(P_{i,j})$ 是一个维数为 $j-i-1$ 的立方体: 从 i 到 j 的不同分段道路不必严格相同, 但它们由一个可缩的高阶同伦空间联系起来.

定义 3.4.5. (取道路范畴构造与同伦脉) 对任意单纯集 X , 取道路范畴构造将 X 送到单纯范畴

$$\mathfrak{C}[X] = \mathrm{colim}_{(\Delta^n \rightarrow X)} \mathfrak{C}[\Delta^n].$$

对单纯范畴 $\mathcal{A}$, 其同伦脉 (homotopy coherent nerve) $N^{\mathrm{hc}}(\mathcal{A})$ 定义为

$$N^{\mathrm{hc}}(\mathcal{A})_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sCat}}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathcal{A}).$$

由构造立即得到伴随

$$\mathfrak{C}[-]: \mathbf{sSet} \xrightleftharpoons[N^{\mathrm{hc}}]{\mathfrak{C}[-]} \mathbf{sCat}.$$

同伦脉的 0-单形是 $\mathcal{A}$ 的对象, 1-单形是映射单纯集的顶点. 一个 2-单形不只给出 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ 与 $h: x \rightarrow z$, 还给出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, z)$ 中连接 h 与 gf 的一条道路; 更高单形继续记录这些道路之间的同伦相容性. 因此它一般不是取映射单纯集之 0-单形后所得经典范畴的普通脉. 只有当映射单纯集全都离散时, 同伦脉才退化为普通脉.

命题 3.4.6. 若单纯范畴 $\mathcal{A}$ 局部 Kan, 则 $N^{\mathrm{hc}}(\mathcal{A})$ 是拟范畴.

证明. 内尖角的延拓问题可转写为若干映射单纯集中的尖角延拓问题, 后者由局部 Kan 条件解决. 参见 [HTT, Proposition 1.1.5.10]. $\square$

定理 3.4.7. (Joyal–Bergner 比较) 取道路范畴–同伦脉伴随给出 Quillen 等价

$$\mathfrak{C}[-]: \mathbf{sSet}_{\mathrm{J}} \xrightleftharpoons[N^{\mathrm{hc}}]{\mathfrak{C}[-]} \mathbf{sCat}_{\mathrm{B}}.$$

左侧取 Joyal 模型结构, 右侧取 Bergner 模型结构.

证明. 参见 [HTT, Theorem 2.2.5.1]. 其中左伴随把范畴型单纯集变为一个复合严格、但映射对象仍保留全部高阶同伦的单纯范畴; 右伴随再用增厚的标准单形读取这些同伦相容性资料. $\square$

这个定理说明拟范畴与局部 Kan 单纯范畴不是两种互相竞争的“高阶范畴定义”, 而是同一个同伦理论的两套点集坐标. 同伦脉把严格的充实复合展开为高阶同伦相容性填充, 取道路范畴构造则把填充资料组织回严格结合的充实复合.

§ 3.5 与模型无关的总图景

把本章出现的模型结构并列起来, 最重要的不是记住每一项公理, 而是先辨认它究竟在呈现什么.

点集呈现	纤维性对象	弱等价	所呈现的高阶范畴
$\mathbf{sSet}_{\mathrm{KQ}}$	Kan 复形	几何实现后的弱同伦等价	空间 $\mathcal{S}$
$\mathbf{Top}_{\mathrm{cgwh}}$	所有方便拓扑空间	弱同伦等价	空间 $\mathcal{S}$
$\mathbf{sSet}_{\mathrm{J}}$	拟范畴	弱范畴等价	$\mathbf{Cat}_{\infty}$
$\mathbf{sCat}_{\mathrm{B}}$	局部 Kan 单纯范畴	DK 等价	$\mathbf{Cat}_{\infty}$

第3章 单纯集与模型结构

如果用 $(-)_\infty$ 表示关于指定弱等价的高阶局部化, 那么上述 Quillen 等价可以压缩为

$$\begin{aligned} (\mathbf{sSet}, W_{KQ})_\infty &\simeq (\mathbf{Top}_{\mathbf{cgwh}}, W_{\mathbf{htpy}})_\infty \simeq \mathcal{S}, \\ (\mathbf{sSet}, W_J)_\infty &\simeq (\mathbf{sCat}, W_{DK})_\infty \simeq \mathbf{Cat}_\infty. \end{aligned}$$

这两行不能交叉误读. 第一行讨论的是对象与道路全部可逆的空间论; 第二行讨论的是允许不可逆态射的范畴论. Kan 复形确实是特殊的拟范畴, 但 Kan-Quillen 与 Joyal 的弱等价类并不相同.

最后再强调模型结构的角色. 在证明分解、构造替换或计算映射空间时, 余纤维化与纤维化非常有用; 一旦转入底层高阶范畴, 它们就退居幕后, 剩下的是对象、映射空间与弱等价所确定的局部化. 因此我们既不必回避模型范畴, 也不应把某一种模型误认成被它呈现的数学对象本身.

第4章

类型论的观点：HoTT 与 CaTT

- 前文从模型范畴与单纯集出发, 用外部的对象、态射、提升与局部化来组织同伦论. 本章换一个方向: 把同伦论看作一种可以在其内部进行推理的语言. 这里的目标只是搭桥, 而不是建立一套完整的类型论课程.
- 最基本的口号是“类型即空间, 项即点”. 依值类型记录空间上的纤维族, 恒等类型记录道路空间, 而恒等之间的恒等继续记录更高同伦. 单叶性则把宇宙中的恒等与类型之间的等价联系起来.
- 这套观点尤其适合同伦型与 ∞ -意象. 它既不把一般 ∞ -范畴中的非可逆态射变为可逆态射, 也不使模型范畴失去作用. 本章最后会把这些边界明确写出来.
- 章末我们还会简要对照 CaTT: 同伦类型论从类型与恒等类型出发公理化空间, CaTT 则尝试从球状粘合图式、定向的高维胞腔与相干性出发, 为弱 ω -范畴提供一种合成语言. 这只是研究方向的路标, 不是一套新的模型比较定理.

本章的基本参考是 Rijke 的讲义 [Rij22, Introduction and Chapters I-II]. 为了保持主线清楚, 我们只写出足以解释语义的少量语法, 省略完整的形成、引入、消去与计算规则.

§ 4.1 判断、语境与依值类型

类型论首先谈的不是一个外部集合中的隶属关系, 而是若干种**判断**. 在语境 Γ 中, 最基本的四种判断可以写成

$$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash A \text{ type}, & \Gamma \vdash a : A, \\ \Gamma \vdash A \equiv_{\text{def}} B \text{ type}, & \Gamma \vdash a \equiv_{\text{def}} b : A. \end{array}$$

前两项分别说 A 是类型、 a 是 A 的项; 后两项是**判断相同**或**定义相同**. 判断相同由类型检查过程直接识别, 它不是稍后要引入的恒等类型中的一个项. 因此必须区分

$$a \equiv_{\text{def}} b : A \quad \text{与} \quad p : a =_A b.$$

左边是元语言中的判断, 右边则是类型论内部的数学对象; 后者一般可以有不止一个项. 这一区分正是高阶信息能够留下来的入口 [Rij22, Chapter I].

语境是一列变量声明, 后项的类型可以依值于前面已经声明的变量:

$$\Gamma = (x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

若

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type},$$

便称 B 是 A 上的**依值类型**或类型族. 一个判断

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)$$

给出这个类型族的一族相容的项. 当 $\Gamma \vdash a : A$ 时, 代入产生类型 $B(a)$ 及项 $b(a) : B(a)$. 普通的非依值类型只是常值类型族.

注记 4.1.1. (语法不是集合记号的改写) 写 $a : A$ 并不是断言集合论中的 $a \in A$. 每个项带有指定类型, 而依值关系只沿语境中已经声明的变量发生. 这个看似细小的变化使“相同的证明”、“相同的结构”都可以成为内部可研究的类型, 而不必预先把所有高阶信息压成真假值.

§ 4.2 类型即空间

沿用 Clausen–Scholze 一系文献的术语, 我们把这里的空间对象称为**生象** (anima). 在本章中, 生象、空间、同伦型与 ∞ -群胚指的是同一种模型独立对象; 它们构成的高阶范畴可以写成

$$\mathbf{Ani} \simeq \mathcal{S} \simeq \mathbf{Gpd}_\infty.$$

最口语化地说, 一个生象像是同伦意义下的“集合”或“一群东西”: 它不只保留对象或点, 还保留点之间的道路、道路之间的道路, 以及全部更高同伦相容性资料. 因而这里的“集合”绝不是普通离散集合的同义词. 普通集合只对应 0-截断的生象; 若只留下点集或 π_0 , 就会丢掉基本群与更高同伦群等资料. Scholze 的讲义同样把生象称为空间, 并把普通集合识别为 0-截断生象, 同时说明生象的高阶范畴可由单纯集关于弱等价局部化得到 [Sch26, Lecture XI].

这里的“生象”也不是继 Kan 复形与拓扑空间之后又添上的第三种点集模型. 前章已经说明, Kan 复形和方便拓扑空间是同一个高阶范畴 $\mathcal{S}$ 的两套呈现; 生象命名的正是被这些模型呈现的对象本身.

把类型论读成同伦论时, 可以先使用下面这张词典:

类型论中的资料	同伦语义中的资料
语境 Γ	底生象, 即底空间或底同伦型
$\Gamma \vdash A \text{ type}$	Γ 上的纤维化 $p: E \rightarrow \Gamma$
$\Gamma \vdash a: A$	p 的截面 $s: \Gamma \rightarrow E$
代入或换基	纤维化的拉回
$a =_A b$	从 a 到 b 的道路空间
$\sum_{x:A} B(x)$	类型族的总空间, 即依值和
$\prod_{x:A} B(x)$	截面空间, 即依值积

于是“类型即空间（即生象），项即点”只是无语境情形的简写. 真正能解释依值结构的版本是: 一个类型族 $x: A \vdash B(x) \text{ type}$ 对应一个纤维化

$$p: E \longrightarrow A, \quad p^{-1}(x) \simeq B(x),$$

而一个依值项 $x: A \vdash b(x): B(x)$ 对应 p 的截面. 若沿 $f: A' \rightarrow A$ 代入 B , 语义上便把 p 拉回到 A' :

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ A' & \xrightarrow{f} & A. \end{array}$$

因此类型论中的代入律, 在语义上要求换基具有严格或相干的函子性. 这也是从一个模型范畴真正构造类型论模型时, 除了同伦范畴以外还需要额外相干资料的原因.

4.2.1 依值和与依值积

设 B 对应 $p: E \rightarrow A$. 依值和

$$\sum_{x:A} B(x)$$

把底点 x 和纤维中的点 $y: B(x)$ 配成 (x, y) , 因而语义上就是总空间 E . 若还有 $y: B(x) \vdash C(x, y) \text{ type}$, 则迭代依值和对应纤维化的复合.

依值积

$$\prod_{x:A} B(x)$$

则由所有相容选择 $x \mapsto b(x)$ 组成, 因而对应 p 的截面空间. 从范畴论看, 对一个具有拉回的范畴中的态射 f , 相应构造在存在时表现为伴随串

$$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f.$$

这里 Σ_f 是沿 f 复合, 因而在切片范畴中给出依值和; 这一步本身不要求局部乘积闭. 依值积 Π_f 才要求 f^* 有右伴随, 对所有 f 都有这种右伴随正是局部乘积闭条件的内容. 在模型语义中还要验证 Π_f 保持所选纤维化, 并且这些构造与换基相容; 一个任意模型范畴不会自动给出这些资料.

注记 4.2.1. (沿道路的搬运) 若 $p : x =_A y$, 那么依值类型 B 给出搬运映射

$$p_* : B(x) \longrightarrow B(y).$$

在纤维化语义中, 这由沿底空间道路的提升来解释. 外部模型还需要选择与换基相容的提升或等价的语义结构; 一条普通纤维化并不会无选择地给出严格唯一的 p_* . 因而依值类型并非逐点任意指定一族对象: 它同时记住这族对象如何随底点以同伦相容的方式变化.

§ 4.3 恒等类型与高阶道路

给定 $a, b : A$, 恒等类型 $a =_A b$ 的项

$$p : a =_A b$$

应当读作一条从 a 到 b 的道路. 它至少带有自反项

$$\text{refl}_a : a =_A a.$$

恒等消去, 也叫道路归纳, 断言要构造一个随 $x : A$ 与 $p : a =_A x$ 的对象, 只需处理 (a, refl_a) 的情形. 从这一条规则可以构造道路的复合与逆, 并证明单位律、结合律与逆元律. 关键在于这些定律通常不是判断相同, 而是由更高一层恒等类型中的项见证 [Rij22, Section 5].

作为拓扑直观, 将 Top_{cgwh} 视为拓扑充实范畴, 可以先看内部态射空间

$$P_{\text{top}}A = \text{Hom}_{\text{Top}_{\text{cgwh}}}([0, 1], A), \quad (d_0, d_1) : P_{\text{top}}A \longrightarrow A \times A.$$

那么 $a =_A b$ 由 (d_0, d_1) 在 (a, b) 上的纤维解释, refl_a 对应常值道路. 若 $p, q : a =_A b$, 则

$$H : p =_{(a=A)b} q$$

是道路之间的道路, 即端点固定的同伦. 继续迭代便得到同伦之间的同伦, 没有预设的最高层.

从模型范畴的角度, 对作为类型来解释的纤维性对象 A , 真正用于语义的是另行选择的对角态射分解

$$A \xleftarrow[\sim]{j} \text{Path}(A) \xrightarrow{(p_0, p_1)} A \times A,$$

其中 j 是平凡余纤维化, (p_0, p_1) 是纤维化, 而 j 解释自反项. 恒等消去的语义来自相应的提升性质. 这里的 $\text{Path}(A)$ 不必等于具体的 $P_{\text{top}}A$; 只有在给定模型、对象与点集条件后, 才能把二者直接认同. 类型论语义真正需要的是这种道路对象在换基下的稳定选择, 而不是只在 $\text{Ho}(\mathcal{C})$ 中看见的态射类.

注记 4.3.1. (为何得到的是高阶群胚) 道路可逆, 但其结合律等只在更高道路的意义下成立; 更高道路又有再高一层的同伦相容性. 因此一个类型并不只给出普通群胚, 而应当被看作带有全部同伦相容性资料的 ∞ -群胚. 这句话的严格含义需要通过 Kan 复形、其他高阶群胚模型或相应的 ∞ -范畴语义来实现, 不能把它理解成一个所有等式都严格成立的无限层代数结构.

§ 4.4 等价、宇宙与单叶性

为了描述类型之间正确的“相同性”, 先定义一个映射 $f : A \rightarrow B$ 在 $b : B$ 上的同伦纤维

$$\text{fib}_f(b) := \sum_{a:A} (f(a) =_B b).$$

一个类型 X 称为**可缩的**, 若

$$\text{isContr}(X) := \sum_{x:X} \prod_{y:X} (x =_X y)$$

有项. 可以把 f 是等价表述为每个 $\text{fib}_f(b)$ 都可缩; 等价地, f 带有适当同伦相容性资料的同伦逆. 所有从 A 到 B 的等价组成类型 $A \simeq B$ [Rij22, Chapter II].

这里的“等价”是类型论内部的概念. 它不能在没有语义定理的情况下, 与任意相对范畴中预先指定的弱等价类画等号. 在标准的 Kan 单纯集语义中, 类型由适当的纤维对象解释, 内部等价与外部同伦论的等价相容; 这是该语义模型的一项结论, 而不是“弱等价”这个词本身带来的事实.

4.4.1 宇宙

宇宙 $\mathcal{U}$ 可以粗略看作“小类型所组成的类型”. 更准确地说, 它带有一个解码族

$$A : \mathcal{U} \vdash \text{El}(A) \text{ type}.$$

一个项 $A : \mathcal{U}$ 是小类型的编码, 真正的类型是 $\text{El}(A)$; 这里没有假设一个额外的“所有类型之类型” Type . 通常省略 El , 直接把 A 当作它所编码的类型. 宇宙要对 Σ 、 Π 与恒等类型等类型构造封闭; 同时不能无条件要求 $\mathcal{U} : \mathcal{U}$, 因而实际使用时还要管理宇宙层次 [Rij22, Section 6].

若 $A, B : \mathcal{U}$, 沿宇宙中的道路 $p : A =_{\mathcal{U}} B$ 搬运, 会得到一个等价

$$\text{idtoequiv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \longrightarrow (A \simeq B), \quad \text{idtoequiv}(\text{refl}_A) = \text{id}_A.$$

定义 4.4.1. (单叶性) 宇宙 $\mathcal{U}$ 称为**单叶的**, 若对任意 $A, B : \mathcal{U}$, 映射 $\text{idtoequiv}_{A,B}$ 是等价.

因此“等价的类型相同”只是单叶性的口语化表达. 精确陈述不是把两个外部对象强行写成字面相等, 而是说宇宙中的道路空间与等价空间自身等价. 特别地, 一个类型的自等

价会给出宇宙中的环路；所以单叶的宇宙通常远不是一个 0-类型。Rijke 将单叶性表述为上述 idtoequiv 是等价，并给出等价归纳等若干等价形式 [Rij22, Theorem 17.1.1 and Axiom 17.1.2].

在标准单纯集模型语义的一类实现中，宇宙由一条分类适当小 Kan 纤维化的泛纤维化表示，而“单叶性”是这条泛纤维化需要额外满足的性质 [KLL21]. 这是模型语义中的构造定理，不是 Kan–Quillen 模型结构形式上的自动推论：还需要选定大小条件、封闭于类型构造的纤维化类以及合适且单叶的宇宙，并验证代入与这些构造的相容性。

§ 4.5 截断层次

恒等类型的复杂度可以递归测量。令

$$\begin{aligned}\text{isTrunc}_{-2}(A) &:= \text{isContr}(A), \\ \text{isTrunc}_{n+1}(A) &:= \prod_{x,y:A} \text{isTrunc}_n(x =_A y).\end{aligned}$$

若 $\text{isTrunc}_n(A)$ 有项，就称 A 是 n -截断类型或 n -类型。前几层可以这样理解 [Rij22, Definition 12.4.1]:

层次	名称	含义
-2	可缩类型	有一个中心，且所有点都与它恒等
-1	命题	任意两个项恒等；可以无项，也可以有项
0	集合	任意恒等类型都是命题
1	群胚层次	任意恒等类型都是集合
n	n -类型	高于第 n 层的道路资料不再含新的信息

从同伦论看， n -截断意味着高于 n 的同伦群消失；从高阶群胚看，它允许我们在第 n 层以后截断同伦相容性资料。并非每个类型都处在某个有限层次：一个一般空间可以同时具有任意高阶的非平凡同伦。这一层次也解释了传统数学如何嵌入类型论：命题是 (-1) -类型，普通集合是 0-类型，而同伦类型论并不要求所有类型都退化到 0 层。

§ 4.6 与前文模型的关系和边界

前文的两个单纯集模型结构在这里扮演不同角色。Kan–Quillen 模型结构呈现同伦型的理论，其纤维性对象是 Kan 复形；Kan 复形中的边可以反向到同伦意义下的逆，因而它们适合解释类型的 ∞ -群胚内容。Joyal 模型结构的纤维性对象是拟范畴，它还记录一般不可逆的

1-态射. 所以裸的“类型即空间”对应前者的方向, 并不把一个任意拟范畴直接变成一个类型.

注记 4.6.1. (三种层次不要混在一起) 1. **语法层:** 判断、代入、 Σ 、 Π 、恒等类型、宇宙与单叶性是生成规则和公理.

2. **语义层:** 在合适的 Kan 单纯集模型中, 依值类型由 Kan 纤维化、恒等类型由纤维道路对象、宇宙由单叶的泛纤维化解释.

3. **所呈现的高阶范畴层:** 该模型呈现空间的 ∞ -范畴; 进入这一层后, 结论不应依赖某个特定点集分解的偶然选择.

这个区分也说明模型范畴为什么仍然有用. 为了证明一个语法系统相容、构造单叶的宇宙、验证 Π 保持纤维化或处理严格代入, 常常仍要在某个具体模型中计算. 模型独立的语言告诉我们哪些结论是内在的; 模型结构则提供证明这些结论和比较不同呈现的工具.

最后, 对于已经配备解释依值类型论所需结构的适当 ∞ -意象语义模型, 同伦类型论提供一种内部语言视角. 这类语义中, 对象像随底空间变化的同伦型, 因而依值和、依值积与恒等类型都有自然解释; 而是否存在严格且单叶的宇宙则是需要证明的语义结果 [Shu19]. 但这并不等于说:

- 任意带非可逆态射的 ∞ -范畴都是一个类型;
- 任意模型范畴都自动为依值类型论提供一个单叶的宇宙;
- 类型等价可以不经验证地认作任意模型结构中的弱等价;
- 有了内部语言以后, 点集模型、局部化与模型之间的比较就可以全部省略.

较稳妥的总结是: 模型范畴与单纯集从外部给出同伦论的呈现, 同伦类型论则把其中一部分高阶结构变成可以在内部直接推理的语法. 两者描述的是相通的数学, 但回答的问题不同, 所需的相干资料也不同.

4.6.1 从恒等类型到 $CaTT$ 的定向胞腔

同伦类型论的起点是类型与恒等类型. 把 $a =_A b$ 解释为道路以后, 它的项在同伦意义下可以取逆, 于是一个类型首先公理化的是空间, 或者说 ∞ -群胚. 可是一般 ∞ -范畴还含有不可逆的态射; 若要在语法内部直接保留这种方向性, 就不能只把所有高维胞腔都当作恒等类型反复迭代.

$CaTT$ (categorical type theory) 的出发点正是另一套最小图式. 它有一个基类型, 其项可看作 0-胞腔; 若 $x, y : A$ 是平行胞腔, 则形成一个新的胞腔类型

$$x \longrightarrow_A y,$$

其中的项比 x, y 高一维. 这里的箭头是定向的胞腔类型, 不是同伦类型论中自动带逆的恒等类型, 也不是普通依值函数类型. 反复使用这个构造便得到对象、1-胞腔、2-胞腔以及更高胞腔的球状边界 [FM17].

只有球状边界还不够: 高阶范畴还需要复合、单位、结合子以及它们之间没有尽头的相干性. $CaTT$ 以**球状粘合语境**记录可以合法拼接的边界图式, 再用高维运算与相干项填充这些图式. 于是复合与结合不必逐维分别列成一张越来越长的公理表, 而由一条统一的语法机制逐层生成. 这也是正在进行的 **Synthetic-Categories-in- $CaTT$** 计划所采用的合成范畴论方向. 该仓库是研究中的形式化工程; 这里引用它是为了说明这条路线, 而不是把其中尚在发展的构造当作已经完成的比较定理 [Cno26].

Finster–Mimram 在 2017 年给出这套语法时提出了相应的初始性猜想 [FM17]. 2024 年的后续工作证明了该猜想, 从而严格说明 $CaTT$ 的集合值模型精确对应 Grothendieck–Maltsiniotis 意义下的球状弱 ω -范畴 [BFM24]. 这是 $CaTT$ 自身的语法–语义比较, 却还不是 $CaTT$ 与 Joyal 或 Bergner 模型结构之间的 Quillen 等价.

因此可以把两条类型论路线先粗略并列为:

合成语言	基本生成资料	主要想要保留的高阶对象
同伦类型论	类型、依值类型与恒等类型	空间或 ∞ -群胚; 道路在同伦意义下可逆
$CaTT$	球状胞腔类型、粘合语境与相干项	弱 ω -范畴; 各维胞腔一般不要求可逆

这张表只比较设计目标. 它没有断言两套语法彼此包含, 也没有断言 $CaTT$ 已经成为任意 ∞ -范畴的完整内部语言.

这里还有一个必须单独指出的层级差别. 普通 $CaTT$ 的模型是球状弱 ω -范畴, 任意维的胞腔原则上都可以不可逆; 前章的拟范畴却呈现 $(\infty, 1)$ -范畴, 只有 1-态射一般不可逆, 2 维及以上的态射都是可逆的. 因此, 如果不另加高维可逆性或相应的截断条件, $CaTT$ 不能被称作 Joyal 模型的内部语言. 它在这里提供的是一条更宽的“公理化高阶范畴”路线.

现在可以把它与前章的两条外部模型路线对齐. 拓扑空间与 Kan–Quillen 单纯集的 Quillen 等价呈现空间; 本章的同伦类型论正是与这条“空间/ ∞ -群胚”路线相呼应的内部语法. 另一方面, Joyal 模型结构保留不可逆的 1-态射, Bergner 模型结构把映射空间组织成充实范畴, 而前章的取道路范畴–同伦脉伴随比较了这两种 $(\infty, 1)$ -范畴呈现. $CaTT$ 与它们共享“从内部处理定向复合及高阶相干性”的动机, 但它的普通模型属于更宽的弱 ω -范畴层级.

这里的“相呼应”不是第三个 Quillen 等价. 要把某个 $CaTT$ 语法与拟范畴、局部 Kan 单纯范畴或其他弱 ω -范畴模型严格比较, 仍需分别给出语义、证明健全性, 并验证模型所表达的等价概念和相干资料确实吻合. 同伦脉与取道路范畴已经给出的比较定理, 不能自动替代这些工作.

4.6.2 全书路线的回望

至此, 本书的几条路线可以放在同一张地图上. 经典范畴论提供对象、态射、伴随、极限与局部化的共同语言; 模型范畴把弱等价、纤维化与余纤维化组织成可以计算的点集呈现; 单纯集一章又把这套方法分成两条典型支线:

$$\mathbf{Top}_{\text{cgwh}} \simeq_Q \mathbf{sSet}_{KQ} \quad \text{空间与 } \infty\text{-群胚,}$$

$$\mathbf{sSet}_J \simeq_Q \mathbf{sCat}_B \quad \text{带不可逆态射的 } \infty\text{-范畴.}$$

最后的类型论观点不是在这张地图上再放一个竞争模型, 而是把视线从外部呈现转向合成推理: 同伦类型论对应第一条路线的内部语言视角, $CaTT$ 则提示一条公理化定向高阶范畴的更广路线; 把它专门化到第二条 $(\infty, 1)$ -路线还需要额外条件与比较工作.

这也给出全书一以贯之的原则: **模型独立并不意味着不再使用模型**. 具体模型让我们构造、计算和比较; 局部化后的高阶范畴说明哪些结论不依赖坐标; 合成语言则尝试把这些内在结构变成可以直接书写和推导的规则. 三者互相校准, 但任何一层都不能在没有比较定理时替另外两层作出结论. 对读者而言, 最实用的习惯是始终先问清楚: 当前讨论的是语法、一个具体模型, 还是模型所呈现的高阶范畴.

参考文献

- [BFM24] T. Benjamin, E. Finster, and S. Mimram. “Globular Weak ω -Categories as Models of a Type Theory”. In: *Higher Structures* 8.2 (2024), pp. 1–69. DOI: [10.21136/HS.2024.07](https://doi.org/10.21136/HS.2024.07). arXiv: [2106.04475](https://arxiv.org/abs/2106.04475) [math.CT]. URL: <https://arxiv.org/abs/2106.04475>.
- [Ber07] J. E. Bergner. “A Model Category Structure on the Category of Simplicial Categories”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 359.5 (2007), pp. 2043–2058. DOI: [10.1090/S0002-9947-06-03987-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-03987-0). arXiv: [math/0406507](https://arxiv.org/abs/math/0406507). URL: <https://arxiv.org/abs/math/0406507>.
- [Cno26] B. Cnossen. *Synthetic Category Theory in CaTT*. Literate Agda formalization; research codebase under active development. 2026. URL: <https://github.com/BastiaanCnossen/Synthetic-Categories-in-CaTT> (visited on 08/20/2026).
- [DG10] G. I. Dungan II. “Review of model categories”. In: *Florida State University* (2010). URL: <https://ncatlab.org/nlab/files/DunganModelCategories.pdf>.
- [FM17] E. Finster and S. Mimram. “A Type-Theoretical Definition of Weak ω -Categories”. In: *Proceedings of the 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (2017), pp. 1–12. DOI: [10.1109/LICS.2017.8005124](https://doi.org/10.1109/LICS.2017.8005124). arXiv: [1706.02866](https://arxiv.org/abs/1706.02866) [cs.LG]. URL: <https://arxiv.org/abs/1706.02866>.
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 35. Springer-Verlag, 1967. ISBN: 9783642858451. DOI: [10.1007/978-3-642-85844-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-85844-4). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85844-4>.
- [GJ09] P. Goerss and J. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2009. ISBN: 9783034601887. DOI: [10.1007/978-3-0346-0189-4](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0189-4). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0189-4>.

参考文献

- [Hovey] M. Hovey. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs 63. American Mathematical Society, 1999. DOI: [10.1090/surv/063](https://doi.org/10.1090/surv/063). URL: <https://doi.org/10.1090/surv/063>.
- [KLL21] K. Kapulkin and P. LeFanu Lumsdaine. “The Simplicial Model of Univalent Foundations (after Voevodsky)”. In: *Journal of the European Mathematical Society* 23.6 (2021), pp. 2071–2126. DOI: [10.4171/JEMS/1050](https://doi.org/10.4171/JEMS/1050). arXiv: [1211.2851](https://arxiv.org/abs/1211.2851). URL: <https://ems.press/journals/jems/articles/274693>.
- [Land] M. Land. *Introduction to Infinity-Categories*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser Cham, Apr. 22, 2021. ISBN: 978-3-030-61523-9. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61524-6>.
- [HTT] J. Lurie. *Higher Topos Theory*. Annals of Mathematics Studies 170. Princeton University Press, 2009. ISBN: 9780691140483. URL: <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf>.
- [Kerodon] J. Lurie. *Kerodon*. <https://kerodon.net>. 2018.
- [nLab] nLab authors. *nLab*. <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>. Sept. 2024.
- [nLab-IHT] nLab authors. *Introduction to Homotopy Theory*. 2026. URL: <https://ncatlab.org/nlab/show/Introduction+to+Homotopy+Theory> (visited on 08/20/2026).
- [QuiHA] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540355236. DOI: [10.1007/BFb0097438](https://doi.org/10.1007/BFb0097438). URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0097438>.
- [Rij22] E. Rijke. *Introduction to Homotopy Type Theory*. 2022. DOI: [10.48550/arXiv.2212.11082](https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.11082). arXiv: [2212.11082](https://arxiv.org/abs/2212.11082) [math.LO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2212.11082>.
- [Sch26] P. Scholze. *Lectures on Analytic Geometry*. Lecture notes; the material presented is part of joint work with Dustin Clausen. 2026. DOI: [10.48550/arXiv.2605.03655](https://doi.org/10.48550/arXiv.2605.03655). arXiv: [2605.03655](https://arxiv.org/abs/2605.03655) [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2605.03655>.
- [Shu19] M. Shulman. *All $(\infty, 1)$ -Toposes Have Strict Univalent Universes*. 2019. DOI: [10.48550/arXiv.1904.07004](https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.07004). arXiv: [1904.07004](https://arxiv.org/abs/1904.07004) [math.AT]. URL: <https://arxiv.org/abs/1904.07004>.

参考文献

- [代数学方法卷一] 李文威. 代数学方法: 基础架构. 第一卷. 高等教育出版社, 2019. ISBN: 9787040507256. URL: <https://www.wvli.asia/downloads/books/Al-jabr-1.pdf>.
- [代数学讲义] 李文威. 代数学讲义. 暂未出版, 2023. URL: <https://www.wvli.asia/downloads/books/EAlg-Notes.pdf>.
- [wvli 卷二] 李文威. 代数学方法: 线性代数. 第二卷. 高等教育出版社, 2024. ISBN: 9787040627541. URL: <https://www.wvli.asia/downloads/books/Al-jabr-2.pdf>.