

Spectra 基本观念

Liu Ou(刘欧)

2026 年 8 月 20 日

Contents

引言	6
I. 谱与稳定范畴	9
1. 上同调理论与 Brown 可表性定理	10
1.1. 同伦拉回与同伦推出	10
1.1.1. 同伦群, 连合与连通	13
1.2. Eilenberg–MacLane 空间与上同调	14
1.2.1. 定义以及基本性质	14
1.2.2. Eilenberg–MacLane 空间的构造	15
1.2.3. Eilenberg–MacLane 空间与上同调	16
1.3. 谱与广义上同调	17
1.4. Brown 可表性定理	18
2. 稳定范畴	25
2.1. 基础知识	26
2.1.1. 模型与具体呈现 (可跳读)	26
2.1.2. 实现-脉伴随	27
2.1.3. Beck–Chevalley 自然变换	27
2.1.4. Grothendieck–Lurie 构造	27
2.1.5. 反射局部化 (左 Bousfield 局部化)	29
2.1.6. 可表现范畴	31
2.1.7. 纬悬与环路	33
2.2. 稳定范畴	34
2.2.1. 定义	34
2.2.2. 稳定范畴与 Abel 范畴	36
2.2.3. 稳定范畴与三角范畴	39
2.2.4. 谱的范畴	40
2.2.5. 谱的展示	44

2.2.6. t -结构	46
2.3. 谱的张量积	51
2.3.1. 计算公式、映射谱与广义同调	51
3. 同调代数	53
3.1. 同调代数	53
3.1.1. Dold–Kan 对应	54
3.1.2. 微分分次范畴	57
3.1.3. 导出范畴	60
3.1.4. 导出范畴的泛性质	64
3.2. 谱值球状预层与 Grothendieck Abel 导出范畴 (选读)	65
3.2.1. 球状预层及其稳定化	66
3.2.2. 紧投射生成的情形	66
3.2.3. 满射拓扑与一般情形	67
II. 单子、高阶代数与下降	68
4. 从伴随到单子	69
4.1. 本部分的目标与路线	69
4.2. 动机：从伴随到单子	70
5. 高阶代数的基本观念	72
5.1. 代数模式	73
5.2. Segal 对象	76
5.3. 代数模式上的算子	81
5.4. $\mathcal{O}$ -么半范畴与 $\mathcal{O}$ -代数	83
5.5. 无么 A_n -代数	86
5.6. Boardman–Vogt 张量积	87
5.7. Lurie–Dunn 可加性定理	89
5.8. 几种对称么半结构	90
5.8.1. 乘积对称么半结构	90
5.8.2. Lurie 张量积	91
5.8.3. 谱的张量积	95
6. Lawvere 理论、生象化与筛余完备化	97
6.1. 例子：群由有限生成自由群控制	97

6.2. 一般机制：筛余完备化	98
6.2.1. 滤余极限还不够	100
6.3. 识别准则：紧投射生成	100
6.4. 一般余完备化中的位置	101
6.5. 应用一：生象化	101
6.6. 应用一的检验：与经典导出范畴比较	102
6.7. 函子性：生象化函子	103
6.8. 应用二：生象环及其上的模	104
7. 单子与 Barr-Beck 定理	106
7.1. 单子	106
7.2. 分裂单纯对象	107
7.3. 自同态范畴	109
7.4. Lurie-Barr-Beck 定理	111
7.5. 例子	116
7.6. 补充	118
7.6.1. 引理 7.4.9 的证明带来的几个推论	118
8. 下降	120
8.1. 一些工具	121
8.1.1. 可伴随方块	121
8.1.2. Čech 脉	122
8.2. 下降与 Lurie-Beck-Chevalley 条件	123
8.3. 应用：导出范畴满足下降	128
9. 交换环谱的下降理论	133
9.1. $\mathbb{E}_k$ -环谱	133
9.1.1. 从静态交换环到交换环谱	134
9.1.2. Morita 理论	135
9.1.3. 交换环上的代数	136
9.2. 可下降对象	137
9.2.1. 用 Adams 塔刻画 pro-常值性	141
9.3. R -线性范畴的下降	143
A. 高阶代数中的若干推论	145
A.1. 关于模的进一步结论	145
A.2. 交换代数上的左模	146

Contents

B. 刻画代数结构的单子 (未完成提纲)	148
B.1. 多项式单子	148
B.2. 解析单子	148
B.3. 代数单子	148
Bibliography	149

引言

这份讲义讨论什么

这份讲义来自代数拓扑讨论班, 主题是谱、稳定范畴以及它们背后的高阶代数方法. 第一部分从三个彼此补充的角度理解谱:

1. 从拓扑角度看, 谱是一列带有相容结构映射的空间, 并表示广义上同调理论;
2. 从范畴角度看, 谱给出生象范畴的稳定化, 也是稳定范畴的基本系数对象;
3. 从同调代数角度看, Dold–Kan 对应与导出范畴给出稳定现象的代数模型, 谱值球状预层则提供一个可选的进一步视角.

第二部分另行建立组织代数结构所需的语言. 我们从伴随与单子出发, 依次介绍代数模式、算畴、生象化、Barr–Beck 单子性定理与下降, 最后把这些工具用到交换环谱上. Lawvere 理论与生象化集中在第二部分的专章中自足展开. 第一部分回答“谱和稳定性是什么”, 第二部分则更关心“怎样在稳定环境中组织代数结构, 又怎样从局部资料恢复对象”.

第一部分主要参考 [Davies and Tatum, 2024, Hebestreit, 2021] 以及 [Cnossen, 2025b, Krause et al., 2024]. 第二部分改写自作者早先的英文讲义, 并吸收了原有中文草稿. 本讲义的目标是给出一条可用于继续阅读文献的主线, 而不是替代一部自足的基础教材. 有些结果只陈述准确假设与结论, 证明则交给所引文献.

读者与先修知识

预期读者是已经学过本科高年级或研究生基础课程的数学学生. 下列背景最有帮助:

- 基础代数拓扑: 同伦、纤维与余纤维、环路与悬挂、同调和上同调;
- 基础范畴论: 极限与余极限、伴随、Yoneda 引理; 需要时正文会回顾 Kan 延拓等较专门的工具;
- 基础同调代数: 链复形、拟同构、导出范畴与投射或内射分解;
- ∞ -范畴的入门语言: 映射生象、极限与余极限、伴随及可表现性. 初次接触的读者可以以把 Haugseng 的讲义 [Haugsgen, 2025] 作为并行参考.

模型范畴不是阅读主线的先修要求. 第一部分有几处用它们给出具体构造或存在性证明; 如果读者主要关心泛性质, 可以先接受相应结论并跳过这些段落.

读完主线以后, 读者应当能够:

1. 在广义上同调的表示对象与生象范畴的稳定化这两种观点之间来回辨认谱;
2. 通过 Dold-Kan 对应与导出范畴解释稳定现象的代数侧面, 并说明导出范畴和谱模范畴之间的基本联系;
3. 用代数模式、算畴、单子及筛余完备化组织同伦相容的代数结构;
4. 识别 Barr-Beck 定理的假设, 并理解它怎样导出 Beck-Chevalley 型下降及交换环谱的下降.

怎样阅读

全书可以顺序阅读, 但并不要求每位读者都沿同一条路线前进.

- **谱与稳定范畴路线:** 阅读第一部分的前三章即可得到从 Brown 可表性、谱到稳定范畴与导出范畴的主线. 只关心抽象结论时, 可以跳过“模型与具体呈现 (可跳读)”“谱的展示”以及同调代数中以模型结构实现局部化的技术段落.
- **单子与下降路线:** 先读第二部分导言, 再从“高阶代数的基本观念”取得线性范畴、模与算畴的语言, 随后阅读 Barr-Beck、下降和交换环谱的下降. 生象化章在这条路线中是可选的; 工具性附录“高阶代数中的若干推论”则可在正文引用到它时随用随查.
- **生象化路线:** 先读第一部分同调代数章中的 Dold-Kan, 再到第二部分的“Lawvere 理论、生象化与筛余完备化”从头学习. 该章自足展开所需概念; Dold-Kan 只提供熟悉的比较背景, 这条路线也不要求预先读完 Barr-Beck 或下降.
- **高阶代数路线:** 可以把“高阶代数的基本观念”作为相对独立的一章来读; 其中每节开头给出局部目标, 后面的工具性附录汇总了正文应用所需而不宜打断主线的结论.

最后一个附录“刻画代数结构的单子”只是尚未完成的研究提纲, 不属于任何必读路线, 其中的关系图也不应当作为已经证明的结论引用.

符号、层次与模型

全书采用下面三层约定; 第一部分与第二部分没有例外.

1. 若无特别说明, “范畴”默认指 ∞ -范畴; 当 $n \geq 2$ 时, 裸写的“ n -范畴”指 $(n, 1)$ -范畴. 若要表示 (∞, n) -范畴, 则显式写出这一记号. 这使正文可以直接使用映射生象以及同伦不变的极限、余极限.

2. 普通范畴一律称为 1-范畴. 对范畴 $\mathcal{C}$, 其同伦 1-范畴记为 $h\mathcal{C}$. 我们用 $\mathbf{Cat}$ 表示范畴所成的范畴, 用 $\mathbf{Cat}_{(1)} \subseteq \mathbf{Cat}$ 表示由 1-范畴张成的全子范畴, 并用 $\widehat{\mathbf{Cat}}$ 处理相应的大宇宙版本.
3. 模型范畴、拟范畴、单纯范畴或拓扑范畴只在需要时充当具体的呈现工具. 正文中的对象与结论最终都在 $\mathbf{Cat}$ 内由泛性质表述, 因而不依赖所选呈现; 这种“先用模型奠基、再在范畴内部工作”的分工也可参见 [Haugseeng, 2025, § 1.8].

此外还采用以下记号:

- 单纯形范畴记为 Δ . 它的对象是非空有限全序集, 态射是保序映射; 每个对象都同构于唯一的 $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$, 其中 $n \geq 0$.
- 空间首先指同伦型, 即 ∞ -群胚. 第一部分常把它们所成的范畴记为 $\mathcal{S}$, 第二部分称其为生象范畴并记作 $\mathbf{Ani}$; 因而 $\mathcal{S} \simeq \mathbf{Ani}$. 当第一部分进行点集层面的构造时, 可以用具有 CW 同伦型的拓扑空间作为呈现.
- 普通拉回、推出与同伦拉回、同伦推出之间的区分只属于点集模型的语境. 本文不再用字母缩写标记方块, 而是在图中分别用角标 $\lrcorner$ 与 $\lrcorner$ 标出拉回方块与推出方块; 在点集模型中需要作上述区分时, 正文会明确写出“普通”或“同伦”. 进入 ∞ -范畴以后, “拉回”和“推出”本身已经是同伦不变的概念.
- $\mathbf{Ar}(\mathcal{C}) = \mathbf{Fun}([1], \mathcal{C})$ 表示箭头范畴.
- 对函子 $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, 本文把 p -Cartesian 态射称为 p -拉回态射, 把 p -coCartesian 态射称为 p -推出态射; 相应的 Cartesian fibration 与 coCartesian fibration 分别称为拉回纤维化与推出纤维化.
- 在本文涉及的可表现或可达情形中, $\mathbf{Fun}^L$ 表示左伴随 (等价地, 保持小余极限的) 函子所成的范畴, $\mathbf{Fun}^R$ 表示右伴随 (等价地, 保持小极限并满足相应可达性条件的) 函子所成的范畴.
- 链复形主要写成同调分次 M_* , 微分为 $d: M_n \rightarrow M_{n-1}$; t -结构沿用稳定同伦论的编号, 因而 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 表示连合部分. 使用经典导出范畴的上同调记号时, 约定 $H^k(M_*) := H_{-k}(M_*)$; 特别地, $\mathcal{D}^-$ 与 $\mathcal{D}^+$ 中的正负号仍按上同调的有界方向理解.
- 把一个 1-范畴放入 $\mathbf{Cat}$ 时, 我们通常省略其脉的符号. 若同一术语的 1-范畴版本与本文默认版本需要同时出现, 正文通常用罗马体与花体加以区分, 例如 D 与 $\mathcal{D}$; 具体含义仍以局部定义为准.

Part I.

谱与稳定范畴

第 1 章

上同调理论与 Brown 可表性定理

本章要回答一个很具体的问题：为什么谱能够统一地表出广义上同调理论？我们先用同伦拉回、同伦推出和 Eilenberg–MacLane 空间准备语言，再说明一个谱如何给出上同调理论，最后用 Brown 可表性定理完成反向构造。

注记 1.0.1. 路径空间、映射柱等拓扑构造只用来给出 $\mathcal{S}$ 中极限与余极限的具体模型；当我们写 $h\mathcal{S}$ 时，才是在同伦 1-范畴中取同伦类。这种“先用泛性质定义，再选模型计算”的观点可参见 [Haugseeng, 2025, § 1.3, § 1.8].

§ 1.1 同伦拉回与同伦推出

普通拓扑空间的严格拉回与推出不会自动保持弱同伦等价。在空间的 ∞ -范畴 $\mathcal{S}$ 中，正确的替代品就是拉回与推出本身；若想用具体拓扑空间计算它们，则需要把“严格交换”放宽为“配上指定同伦的交换”。

比如说图表

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & Y \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

我们想让它在同伦意义下交换，那么我们就需要在 L 上做手脚，使得 $fg' \sim gf'$ ，即构造 $H: [0, 1] \times L \rightarrow Z$ 使得对于任意 $l \in L$ 都有 $H(0, l) = fg'(l)$ 且 $H(1, l) = gf'(l)$ 。因此可以归结出同伦拉回与同伦推出的定义

定义 1.1.1. 考虑 $\mathcal{S}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow f & \\ Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

定义其**同伦拉回** $X \times_Z^h Y$ 为 $\mathcal{S}$ 中该图表的拉回。选取路径空间作为具体模型时，它可写为

$$X \times_Z^h Y := X \times_{Z, s} Z^{[0, 1]} \times_{Z, t} Y = \{(x, p, y) \in X \times Z^{[0, 1]} \times Y : p(0) = f(x), p(1) = g(y)\}.$$

分别记 $X \times_Z^h Y$ 到 X 和 Y 的投影为 $\mathbf{pr}_X$ 和 $\mathbf{pr}_Y$. 考虑同伦 $H: (X \times_Z^h Y) \times [0, 1] \rightarrow Z$. 这个具体模型构成拉回方块

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z^h Y & \xrightarrow{\mathbf{pr}_Y} & Y \\ \mathbf{pr}_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

其中使方块相容的指定 2-态射为

$$H: f \circ \mathbf{pr}_X \Rightarrow g \circ \mathbf{pr}_Y.$$

这是 $\mathcal{S}$ 中拉回的一个具体模型. 其泛性质是: 给出态射 $T \rightarrow X \times_Z^h Y$, 等价于给出 $t_X: T \rightarrow X$ 、 $t_Y: T \rightarrow Y$ 以及一条指定的同伦 $ft_X \simeq gt_Y$; 这一对应保留全部高阶相容性.

定义 1.1.2. 考虑 $\mathcal{S}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow f & & \\ X & & \end{array}$$

定义其**同伦推出** $X \sqcup_Z^h Y$ 为 $\mathcal{S}$ 中该图表的推出. 选取映射柱作为具体模型时, 它可写为

$$\begin{aligned} X \sqcup_Z^h Y &:= X \sqcup_{Z,0} (Z \times [0, 1]) \sqcup_{Z,1} Y \\ &\simeq (X \sqcup (Z \times [0, 1]) \sqcup Y) / \sim. \end{aligned}$$

此处等价关系 $\sim$ 是将 $(z, 0) \in Z \times [0, 1]$ 与 $f(z) \in X$ 以及 $(z, 1) \in Z \times [0, 1]$ 与 $g(z) \in Y$ 粘起来. 分别记两个分量到同伦推出的嵌入为 ι_X 和 ι_Y . 考虑同伦 $H: Z \times [0, 1] \rightarrow X \sqcup_Z^h Y$ 为 $(z, t) \mapsto (z, t)$, 使得其满足 $H_0 = \iota_X f$ 且 $H_1 = \iota_Y g$. 这个具体模型构成推出方块

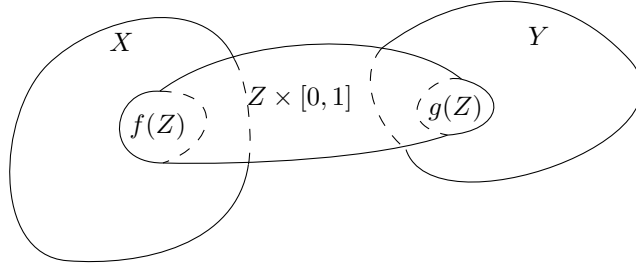
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota_Y \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \sqcup_Z^h Y. \end{array}$$

其中使方块相容的指定 2-态射为

$$H: \iota_X \circ f \Rightarrow \iota_Y \circ g.$$

其泛性质表述如下: 给出态射 $X \sqcup_Z^h Y \rightarrow T$, 等价于给出 $t_X: X \rightarrow T$ 、 $t_Y: Y \rightarrow T$ 以及一条指定的同伦 $t_X f \simeq t_Y g$.

同伦推出可绘作下图



这两个例子也解释了为什么本讲义把 $\mathcal{S}$ 当作 ∞ -范畴: 同伦以及同伦之间的高阶同伦都是极限、余极限泛性质的一部分, 不应当在定义时丢掉. 而后给出一些结构,

定义 1.1.3. 给定态射 $f: X \rightarrow Y$, 则

- f 在 $y \in Y$ 处的**同伦纤维**是指以下同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} f^{-1,h}(\{y\}) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

- f 的**同伦余纤维**是指以下同伦推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Y \sqcup_X^h *. \end{array}$$

其可以被具体地刻画为

$$Y \sqcup_X^h * := Y \sqcup_X (X \times [0, 1]) / X \times \{1\}$$

常将其记为 $C(f)$. 给定带有零伦 $gf \sim \text{const}_z$ 的 $g: Y \rightarrow Z$, 记其对应同伦为 H , 则 $H_0 = gf, H_1 = \text{const}_z$. 由此根据同伦推出的泛性质得到典范态射

$$C(f) \rightarrow Z, \quad y \mapsto g(y), \quad (x, t) \mapsto H(x, t).$$

称序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**余纤维列**是指 $Z \simeq C(f)$.

例 1.1.4. 取 $f = \text{id}_X$, 则同伦余纤维 $C(\text{id}_X)$ 即为 X 的**锥**, 记为 $C(X)$. 注意到 $C(f) = Y \sqcup_X C(X)$.

接下来考虑带点的情况,

注记 1.1.5. 当 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$ 为带点空间时, $x: * \rightarrow X$ 沿自身的同伦拉回即为 ΩX :

$$\Omega X = \Omega(X, x) := \{p: [0, 1] \rightarrow X: p(0) = p(1) = x\}$$

选定基点 const_x , 可将 ΩX 视为带点空间, 称为**环路空间**. 给定带点空间之间的态射 $(X, x) \rightarrow (Y, y)$, 不难发现其诱导出 $\Omega(f): \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y), p \mapsto f \circ p$, 因此 Ω 定义出函子

$$\Omega: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*.$$

(X, x) 在 $\mathcal{S}_*$ 中的锥称为**约化锥**, 它被刻画为 $\tilde{C}(X) := C(X)/\{x\} \times [0, 1]$. 类似地, 对于带点空间间的态射 $f: X \rightarrow Y$, 可定义 f 的**约化同伦余纤维**为 $\tilde{C}(f) = Y \sqcup_X \tilde{C}(X)$. 对于带点空间间的态射链 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 称其为**余纤维列**是指 $gf \sim \text{const}_*$ (这一条件是确保图表在同伦意义下交换) 且其诱导了同伦等价 $\tilde{C}(f) \simeq Z$.

例 1.1.6. 令 $X \in \mathcal{S}$ 为空间, 则 $X \rightarrow *$ 的同伦余纤维被称为**纬悬**, 记为 SX . 当 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$ 为带点空间时, 其**约化纬悬**定义为商 $\Sigma X := SX/(\{x\} \times [0, 1])$. 不难发现后者定义出函子 $\Sigma: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$, 将 $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ 映为 $\Sigma(f)[(x, t)] := [(f(x), t)]$.

练习 1.1.7. 说明具有伴随 $\Sigma \dashv \Omega$.

最终可以总结发现, 在 $\mathcal{S}_*$ 中对于带点空间 (X, x) , 有

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \Sigma(X) \end{array}$$

分别为同伦拉回和同伦推出图表. 在随后两章中我们将对此进行更加深入的探索, 说明 Ω 是在降低一个维数而 Σ 是在提升一个维数.

1.1.1 同伦群, 连合与连通

定义 1.1.8. 对于 $k \geq 0$ 与带点空间 $(X, x) \in \mathcal{S}_*$, 则定义 $\pi_k(X, x)$ 为

$$\pi_k(X, x) := [S^k, X]_*$$

不难发现

$$\pi_k(\Omega X) = [S^k, \Omega X]_* \simeq [\Sigma S^k, X]_* = \pi_{k+1}(X).$$

命题 1.1.9. 对于 $k \geq 1$, $\pi_k(X)$ 具有群结构; 特别地, 当 $k \geq 2$ 时, $\pi_k(X)$ 具有 *Abel* 群结构.

证明. 环路的串接运算在同伦类上给出 $\pi_k(X) \simeq \pi_{k-1}(\Omega X)$ 的群结构. 当 $k \geq 2$ 时, 双重环路给出两个相容的群运算, 由 **Eckmann–Hilton 论证**可知它们相同且可交换. $\square$

因此在 $k \geq 1$ 时, 将 $\pi_k(X, x)$ 称为**同伦群**. 而在 $k = 0$ 时, 称为**连通分支**.

注记 1.1.10. 不难发现当 $k = 1$ 时 $\pi_1(X, x)$ 即为基本群.

定义 1.1.11. 称空间 X 是 n -**连通的**, 是指 $\pi_k(X)$ 在 $0 \leq k \leq n$ 时均平凡. 称 X 是 n -**连合**的, 是指 $\pi_k(X)$ 在 $0 \leq k < n$ 时均平凡; 也就是说, n -连合等价于 $(n-1)$ -连通. 记 $\mathcal{S}^{\geq n} \subseteq \mathcal{S}$ 为 n -连合空间所构成的全子范畴.

注记 1.1.12. 一般我们描述谱的时候比较喜欢用连合. 不过在本文中, 哪个比较方便就用哪个.

定义 1.1.13. 设 X, Y 为空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射. 称 f 为**弱同伦等价**, 如果它满足以下性质:

- f 诱导 π_0 的双射:

$$f_*: \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y).$$

- 对任意自然数 $n > 0$ 及任意 $x \in X$, f 诱导第 n 阶同伦群的同构:

$$f_*: \pi_n(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y, f(x)).$$

此时, 也称空间 X, Y **弱同伦等价**. 一般地, 拓扑空间的弱同伦等价是指上述关系生成的等价关系.

定理 1.1.14. (Whitehead) 设 X, Y 为 CW 复形, 若 $f: X \rightarrow Y$ 为弱同伦等价则 $f: X \rightarrow Y$ 为同伦等价.

警告 1.1.15. Whitehead 定理成立的条件是 $f: X \rightarrow Y$ 为一个态射时, 而非是逐 π_i 都存在同构, 一个著名的反例是考虑 $X := S^2 \times \mathbb{RP}^3$ 与 $Y := S^3 \times \mathbb{RP}^2$ 的情况, 它们具有相同的万有覆盖 $S^2 \times S^3$ 因此对于 $n \geq 2$ 时, $\pi_n(X) \simeq \pi_n(S^2 \times S^3) \simeq \pi_n(Y)$ (参见 [Hatcher, 2002, § 4.1 习题 4.]), 而在 $n = 1$ 时, 由于二者均为 $\mathbb{Z}/2$ 作用得到 X 和 Y 的基本群均为 $\mathbb{Z}/2$. 但是若具体计算它们的同调群会发现它们的同调群不相等, 使用 Künneth 公式计算即可.

此外还具有一个反例, $S^2 \times S^2$ 和 $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ 的同伦群和同调群均逐次同构 (π_0 为双射), 但是仍然非同伦等价, 可参见 [Math StackExchange](#).

§ 1.2 Eilenberg–MacLane 空间与上同调

1.2.1 定义以及基本性质

定义 1.2.1. 对于 $n > 0$ 以及群 G (当 $n \geq 2$ 时交换), 称连通空间 $X \in \mathcal{S}$ 为 (G, n) -**型 Eilenberg–MacLane 空间**是指

$$\pi_i(X) \simeq \begin{cases} G, & i = n \\ *, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

一般将 (G, n) -型 Eilenberg–MacLane 空间记为 $K(G, n)$. 另外约定 $K(G, 0)$ 表示离散空间 G .

以下给出一些 Eilenberg–MacLane 空间的例子

例 1.2.2. 1. S^1 即为 $K(\mathbb{Z}, 1)$;

2. $\mathbb{RP}^\infty \simeq K(\mathbb{Z}/2, 1)$, 为说明这一点, 只需观察到 $\mathbb{RP}^\infty$ 的万有覆叠 S^∞ 是可缩的并且有均匀作用 $\mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ 通过 $(\pm 1, x) \mapsto \pm x$ 作用于 S^∞ 使得 $S^\infty / \sim \simeq \mathbb{RP}^\infty$ 即可;

3. $\mathbb{CP}^\infty \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$, 因为有纤维列 $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$, 再次使用 $S^\infty \simeq *$ 这一事实, 可以计算得到 $\pi_{i+1}(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \pi_i(S^1)$, 再利用 $S^1 \simeq K(\mathbb{Z}, 1)$ 即可.

命题 1.2.3. 令 $n > 0$, G 为群 (当 $n \geq 2$ 时为交换群), 则 $\Omega K(G, n) \simeq K(G, n-1)$; 当 $n = 1$ 时, 右边指离散空间 G .

证明. 直接计算即可

$$\pi_i(\Omega K(G, n)) = [S^i, \Omega K(G, n)]_* \simeq [\Sigma S^i, K(G, n)]_* \simeq [S^{i+1}, K(G, n)]_* = \pi_{i+1}(K(G, n)).$$

□

因此在同构意义下, 我们有以下序列

$$K(G, 0) \xleftarrow{\Omega} K(G, 1) \xleftarrow{\Omega} K(G, 2) \xleftarrow{\Omega} \cdots \xleftarrow{\Omega} K(G, n) \xleftarrow{\Omega} \cdots \quad (1.1)$$

1.2.2 Eilenberg–MacLane 空间的构造

以下对于 $n > 1$ 时给出一种构造 Eilenberg–MacLane 空间的方式, 这亦可表明任意 Eilenberg–MacLane 空间总能由 CW 复形构造出, 对于 $n = 1$ 的情况参见 [Hatcher, 2002, Example 1B.7.].

回忆 Hurewicz 定理:

定理 1.2.4. (Hurewicz) 令 $n \geq 1$, 对于 n -连合的拓扑空间 X , 有

- $n = 1$ 时, $H_1(X)$ 是 $\pi_1(X)$ 的交换化;
- $n > 1$ 时, $H_n(X) = \pi_n(X)$, 且对于 $i < n$ 有 $H_i(X) = \pi_i(X) = 0$.

首先构建一个 n -连合的 $(n+1)$ 维 CW-复形 X , 使得 $\pi_n(X) \simeq G$. 从球面的楔和 $\bigvee_\alpha S_\alpha^n$ 出发, 再沿态射 φ_β 粘接 $(n+1)$ -胞腔, 即有推出图表

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_\beta S^n & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \bigvee_\alpha S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_\beta D^{n+1} & \xrightarrow{\quad \quad} & X. \end{array}$$

因此由 Mayer–Vietoris 序列可知

$$H_n(X) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z} \right) / \langle [\varphi_{\beta}] \rangle,$$

此处 $[\varphi_{\beta}]$ 表示 φ_{β} 的同伦类. 因为 $n > 1$ 时 G 是 Abel 群, 可以选取 G 的自由 Abel 群展示, 再用关系元选择合适的 φ_{β} . 由定理 1.2.4 得 $G \simeq H_n(X) \simeq \pi_n(X)$.

接下来逐阶杀掉更高的同伦群. 若已构造到 CW-复形 X_m , 就选取一组生成 $\pi_m(X_m)$ 的态射 $S^m \rightarrow X_m$, 并沿它们粘上 $(m+1)$ -胞腔. 这不改变 m 阶以下的同伦群, 却杀掉了选定的 m 阶元素. 从 $m = n+1$ 起归纳进行, 取所得序列的同伦余极限, 就得到 $K(G, n)$.

1.2.3 Eilenberg–MacLane 空间与上同调

以下命题给出 Eilenberg–MacLane 空间与上同调之间的关系.

定理 1.2.5. 令 $n > 0$ 且 G 为 Abel 群. 对于连通带点 CW-复形 X , 有自然双射

$$[X, K(G, n)]_* \simeq \tilde{H}^n(X; G) = H^n(X; G).$$

证明. [Hatcher, 2002, Proposition 4.57.]. 本章后面的定理 1.4.5 也会给出另一条可表性的路线. $\square$

因此, 固定 Abel 群 G , 我们知道每个 $K(G, n)$ 就对应于 G -系数 n -阶上同调群, 而在 (1.1) 中所给出的链相当于全体的 G -系数上同调. 我们将这种结构称为谱.

定义 1.2.6. 预谱 X_* 由以下信息构成:

- 一系列带点空间 $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$;
- 对任何 $n \geq 0$, 有保持基点的态射 $\sigma_n: \Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$ 表示升维.

称 X 为 **谱**, 是指对于任何 $n \geq 0$, σ_n 的伴随态射 $X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$ 为同伦等价.

给定谱 $Y_* = (Y_n)_{n \geq 0}$, 则谱之间的态射 $f: X_* \rightarrow Y_*$ 是一列带点态射 $(X_n \xrightarrow{f_n} Y_n)_n$, 并配上使下图交换的相容同伦 H_n :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega X_{n+1} \\ \downarrow f_n & \swarrow H_n & \downarrow \Omega f_{n+1} \\ Y_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega Y_{n+1}. \end{array}$$

严格地说, 上述是 Ω -谱的层次描述, 态射中的同伦还要带有高阶相容性. 后文会把谱定义为一个 ∞ -范畴的极限, 届时这些相容性会被自动记录.

例 1.2.7. 固定 Abel 群 G , 定义 G 的 **Eilenberg–MacLane 谱** HG 为 $(HG)_n := K(G, n)$.

§ 1.3 谱与广义上同调

以下我们探究一个问题:

更广义的上同调是否能够被某个谱所表出?

答案是肯定的.

不过我们应该先确定什么是广义上同调.

定义 1.3.1. 广义上同调理论 (或简称为上同调理论) 是指由以下信息所构成的二元组 (E^*, ∂)

- $E^*: h\mathcal{S}_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为函子,
- 韦悬同构

$$\partial: E^*(-) \xrightarrow{\sim} E^{*+1}(\Sigma(-)).$$

满足以下条件:

- (楔和) 对于任意一族带点空间 $\{X_i\}_{i \in I}$, 含入函子 $\iota_i: X_i \hookrightarrow \bigvee_{i \in I} X_i$ 诱导出自然同构

$$(\iota_i^*)_{i \in I}: E^*\left(\bigvee_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} E^*(X_i).$$

特别地, 当 $I = \emptyset$ 时, $E^*(*) \simeq 0$;

- (正合性) 带点空间的余纤维列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 诱导出正合列

$$E^*(Z) \xrightarrow{g^*} E^*(Y) \xrightarrow{f^*} E^*(X)$$

注记 1.3.2. (映射锥) 事实上, 给定余纤维列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 我们可以继续往后求余纤维, $Y \rightarrow Z$ 的余纤维等价于 $\Sigma(X)$ (在同调代数中的类比是映射锥), 而 $Z \rightarrow \Sigma(X)$ 的余纤维是 $\Sigma(Y)$. 据此给出一串余纤维列, 称为 **Puppe 序列**:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \Sigma(X) \xrightarrow{\Sigma(f)} \Sigma(Y) \xrightarrow{\Sigma(g)} \Sigma(Z) \rightarrow \Sigma^2(X) \rightarrow \dots$$

作用上函子 E^* 后给出一串长正合列

$$\dots \xrightarrow{f^*} E^{n-1}(X) \rightarrow E^n(Z) \xrightarrow{g^*} E^n(Y) \xrightarrow{f^*} E^n(X) \rightarrow E^{n+1}(Z) \rightarrow \dots$$

注记 1.3.3. (相对上同调) 对于每个上同调理论 E^* , 对于 CW-对 (X, A) 可定义**相对上同调** $E^*(X, A) := E^*(X/A)$, 根据注记 1.3.2 可用余纤维列 $A_+ \rightarrow X_+ \rightarrow X/A$ 恢复出相对上同调的长正合列 (参见 [Hatcher, 2002, page 199]).

以下说明每个谱都可以建立起一种上同调理论

构造 1.3.4. 令 $E = (E_n)_{n \geq 0}$ 为谱. 定义 $E^*: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为

$$E^k(X) := \begin{cases} [X, E_k]_*, & k \geq 0 \\ [\Sigma^{-k}X, E_0]_*, & k < 0. \end{cases}$$

给定同伦等价 $E_k \simeq \Omega E_{k+1} \simeq \Omega^2 E_{k+2}$, 由与命题 1.1.9 相似的构造可知 $E^k(X)$ 具有 Abel 群结构. 最后构造 ∂ , 当 $k \geq 0$ 时它由下式给出

$$\partial: E^k(X) = [X, E_k]_* \simeq [X, \Omega E_{k+1}]_* \simeq [\Sigma X, E_{k+1}] = E^{k+1}(\Sigma X),$$

而 $k < 0$ 时, 它定义为同构

$$\begin{aligned} E^k(X) &= [\Sigma^{-k}X, E_0]_* \xrightarrow{\sim} [\Sigma^{-(k+1)}\Sigma X, E_0]_* \\ &= E^{k+1}(\Sigma X). \end{aligned}$$

命题 1.3.5. 令 E 为谱, 则 (E^*, ∂) 确实构成上同调理论.

证明. 对于同伦态射 $f \sim g: X \rightarrow Y$, 其诱导出相等的 $f^*, g^*: E^k(X) \rightarrow E^k(Y)$, 因此 E^k 是良定义的. 给定一族带点空间 $\{A_i\}_{i \in I}$, 从 $\bigvee_{i \in I} A_i$ 到 E_k 的态射对应于一族态射 $A_i \rightarrow E_k$, 由于这一过程保持带点同伦等价类, 因此得到

$$E^k\left(\bigvee_{i \in I} X_i\right) = \left[\bigvee_{i \in I} X_i, E_k\right]_* \simeq \prod_{i \in I} [X_i, E_k]_* = \prod_{i \in I} E^k(X_i);$$

当 $k < 0$ 时, Σ^{-k} 保持楔和, 因此同一论证仍然成立. 最后, 余纤维列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 诱导 Puppe 序列; 对其反变地取到无穷环路空间 E_k 的同伦类, 就得到

$$E^k(Z) \longrightarrow E^k(Y) \longrightarrow E^k(X)$$

的正合性. 负次情形再对序列作适当次数的纬悬即可. $\square$

于是一个谱总能给出广义上同调理论. 剩下的问题是反向: 一个满足楔和与正合性的理论, 能否由谱表出? Brown 可表性正是这一步的核心.

§ 1.4 Brown 可表性定理

定义 1.4.1. 考虑函子 $F: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

1. 称 F 满足**楔和公理**是指 F 保持乘积 (注意到 hS_*^{op} 中的乘积是楔和 $\vee$).
2. 称 F 具有 **Mayer-Vietoris 性质**是指对于任意连通带点空间所构成的同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow l & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array} \quad \lrcorner$$

都诱导出满射

$$(i^*, j^*): F(X) \rightarrow F(A) \times_{F(C)} F(B).$$

注记 1.4.2. 若 F 满足楔和公理, 那么对于 $X \in h\mathcal{S}_*$, 因为 $[\Sigma X, Y]_* \simeq [X, \Omega Y]_*$, 从而 ΣX 是 $h\mathcal{S}_*$ 中的余群对象, 因此可以根据 Eckmann–Hilton 论证可知 $F(\Sigma^2 X)$ 带有 Abel 群结构.

接下来解释如何由前文所提到的 Mayer–Vietoris 性质恢复出 Mayer–Vietoris 公式, 为此先给出一个事实

事实 1.4.3. 给定同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & & \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

若左右两个面都是同伦推出, 则其水平方向上态射的同伦余纤维会给出同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C(f_2) & \longrightarrow & C(f_0) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C(f_1) & \longrightarrow & C(f). \end{array}$$

验证是不难的, 只需说明 $(Y_0 \sqcup_{Y_2}^h Y_1) \sqcup_{X_0 \sqcup_{X_2}^h X_1}^h * \simeq (Y_0 \sqcup_{X_0}^h *) \sqcup_{Y_2 \sqcup_{X_2}^h *}^h (Y_1 \sqcup_{X_1}^h *)$ 即可. 在 $\mathcal{S}$ 中把这些同伦推出视作推出后, 这就是余极限相互交换.

注记 1.4.4. 若 $F: h\mathcal{S}_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 穿过 Ab , 则 Mayer–Vietoris 性质结合事实 1.4.3 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} * & \xrightarrow{f_2} & C & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{f_0} & A & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B & \xrightarrow{f_1} & B & & \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \\ & A \vee B & \xrightarrow{f} & X & \end{array}$$

可知 $A \vee B \rightarrow X$ 的余纤维即为 $C(f)$, 而根据事实 1.4.3 可知其为 ΣC (同理可证明 $X \rightarrow \Sigma C$ 的余纤维是 $\Sigma A \vee \Sigma B$). 将三角旋转变为余纤维列 $C \rightarrow A \vee B \rightarrow X$ 再作用上 F 后得到正合列

$$F(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} F(A) \times F(B) \xrightarrow{k^* - l^*} F(C)$$

若 F 还满足楔和公理, 那么余纤维列 $A \vee B \rightarrow X \rightarrow \Sigma C$ 可以延拓为长正合列

$$\cdots \rightarrow F(\Sigma A) \times F(\Sigma B) \xrightarrow{(\Sigma k)^* - (\Sigma l)^*} F(\Sigma C) \xrightarrow{\partial} F(X) \xrightarrow{(i^*, j^*)} F(A) \times F(B) \xrightarrow{k^* - l^*} F(C).$$

自此 Brown 可表性定理已然呼之欲出, 我们给出其陈述.

定理 1.4.5. (Brown) 令 $hS_*^{\geq 1}$ 为连通带点 CW -复形所构成的同伦 1-范畴. 函子

$$F: (hS_*^{\geq 1})^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$$

可表当且仅当其满足楔和公理以及 *Mayer-Vietoris* 性质.

警告 1.4.6. 带点以及连通性均不可缺少, 否则就可以找到反例.

以下为证明 Brown 可表性定理做一些准备工作, 根据 Yoneda 引理对于连通空间 Z , 以及 $\xi \in F(Z)$, 可以得到自然变换

$$T_\xi: [X, Z]_* \rightarrow F(X), \quad (X \xrightarrow{f} Z) \mapsto f^* \xi$$

其中 $f^* := F(f): F(Z) \rightarrow F(X)$. 称 ξ 关于 $n \geq 0$ 是 n -万有元是指

$$T_\xi: \pi_k(Z) = [S^k, Z]_* \rightarrow F(S^k)$$

在 $1 \leq k < n$ 上为双射, 且在 $k = n$ 时为满射. 称 ξ 是万有元是指对于任意 $n \geq 0$ 都有 ξ 为 n -万有元.

下述命题将告诉我们这些定义的作用.

命题 1.4.7. 令 $F: (hS_*^{\geq 1})^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ 为满足楔和公理以及 *Mayer-Vietoris* 性质的函子. 则对于连通带点 CW -复形 X 以及每个 $\eta \in F(X)$, 都存在连通带点 CW -复形 Z_X , 带点态射 $f_X: X \rightarrow Z_X$ 以及万有元 $\xi_X \in F(Z_X)$ 使得 $f_X^*(\xi_X) = \eta$.

证明. 我们分两步构造满足条件的 Z_X .

第一步. 首先构建一系列态射

$$X =: Z_0 \xrightarrow{f_0} Z_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$$

使得 $F(Z_n)$ 中的 n -万有元 ξ_n 满足 $f_n^*(\xi_{n+1}) = \xi_n \in F(Z_n)$, 且 $\xi_0 = \eta \in F(X)$. 通过对于 n 进行归纳来构造这一序列, 当 $n = 1$ 时, 我们可以试着定义出一个足够好的底空间 Z_1 , 即定义

$$Z_1 := X \vee \bigvee_{m \geq 1} \bigvee_{\gamma \in F(S^m)} S^m$$

如此一来根据楔和公理可知

$$F(Z_1) \simeq F(X) \times \prod_{m \geq 1} \prod_{\gamma \in F(S^m)} F(S^m),$$

此时不难发现可将 ξ_1 选取为这样的元素: 其在 $F(X)$ 处的投影为 η , 且在 $\gamma \in F(S^m)$ 所对应的 $F(S^m)$ 中选取为 γ . 注意到此时对于任意 $k \geq 1$, 都有满射 (此时带点态射 $f: S^k \rightarrow Z_1$ 都可以对应到某个 $\gamma \in F(S^m)$ 中, 从而 $f^*\xi_1 = \gamma$)

$$T_{\xi_1}: [S^k, Z_1]_* \rightarrow F(S^k)$$

由此可知 ξ_1 至少是 0-万有元且其也为 1-万有元.

接下来对于 $n \geq 1$ 的情况, 由于对任意 $k \geq 1$ 都已有满射 $[S^k, Z_1]_* \rightarrow F(S^k)$, 我们只需逐次杀掉其核. 假设已经构造好 Z_n , 定义

$$K_n := \{[f] \in [S^n, Z_n]: f^*\xi_n = 0 \in F(S^n)\}$$

沿这些代表态射粘上 $(n+1)$ -胞腔, 也就是定义 Z_{n+1} 为同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{[f] \in K_n} S^n & \longrightarrow & Z_n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_n \\ * \simeq \bigvee_{[f] \in K_n} D^{n+1} & \longrightarrow & Z_{n+1}. \end{array}$$

对于全体 $[f] \in K_n$ 都有 $f^*(\xi_n) = 0$, 因此 Mayer-Vietoris 性质允许我们选取 $\xi_{n+1} \in F(Z_{n+1})$ 使得 $f_n^*\xi_{n+1} = \xi_n$. 粘胞腔杀掉了 T_{ξ_n} 的核, 而保留了已有的满射性, 因此 ξ_{n+1} 是 $(n+1)$ -万有元.

第二步. 现在我们有 Z_n 以及 n -万有元 ξ_n , 以下给出 Z_X 的构造, 由 Z_n 到 Z_{n+1} 的构造以及 $(n+1)$ -万有元同时为 n -万有元可知, 应当将 Z_X 定义为同伦余极限

$$Z_X := \varinjlim_n Z_n := \left(\bigvee_{n \geq 1} Z_n \wedge [n, n+1]_+ \right) / \sim$$

此处 $\sim$ 定义为 $(x_n, n+1) \sim (f_n(x_n), n+1)$. 接下来验证 Z_X 就是我们所要找到的东西. 该同伦余极限同伦等价于同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{n \geq 0} Z_n & \longrightarrow & \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k+1} & \longrightarrow & Z_X \end{array}$$

$\bigvee_{n \geq 0} Z_n \rightarrow \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k}$ 由 $n = 2k$ 时取为 id 而 $n = 2k+1$ 时取为 $f_{2k+1}: Z_{2k+1} \rightarrow Z_{2k+2}$ 给出. 类似地, $\bigvee_{n \geq 0} Z_n \rightarrow \bigvee_{k \geq 0} Z_{2k+1}$ 在 $n = 2k+1$ 时取为 id 在 $n = 2k$ 时取为 $f_{2k}: Z_{2k} \rightarrow Z_{2k+1}$.

因此根据 Mayer-Vietoris 性质可给出 $\xi \in F(Z_X)$ 使其限制到 $F(Z_n)$ 上为 ξ_n . 接下来说明 ξ 是万有元. 只需考虑对固定的 k , 只需考察序列中从第 k 项开始的尾部:

$$\begin{array}{ccccccc}
 [S^k, Z_k]_* & \rightarrow & [S^k, Z_{k+1}]_* & \xrightarrow{\sim} & [S^k, Z_{k+2}]_* & \xrightarrow{\sim} & \cdots \xrightarrow{\sim} [S^k, Z_X]_* \\
 & \searrow T_{\xi_k} & \downarrow T_{\xi_{k+1}} & \swarrow T_{\xi_{k+2}} & & & \nearrow T_{\xi} \\
 & & F(S^k) & & & &
 \end{array}$$

不难发现对于 $n > k$ 都有 T_{ξ_n} 为双射.

□

以下证明 Brown 可表性定理.

定理 1.4.5 的证明. F 可表推 F 满足楔和公理与 Mayer-Vietoris 性质是显然的. 我们来证明反向的情况.

对于 $X = *$ 且 $\eta := 0 \in F(*)$ 为唯一的元素的情况使用命题 1.4.7 可知存在 $Z := Z_*$ 以及 $\xi := \xi_*$, 使得 ξ 为万有元. 接下来说明对于任意带点空间 X 都有双射

$$T_{\xi}: [X, Z]_* \rightarrow F(X), \quad (X \xrightarrow{f} Z) \mapsto f^* \xi$$

分为满与单的情况进行说明:

满射. 选取 $\eta \in F(X)$ 而后考虑空间 $\tilde{X} := X \vee Z$ 且 $\tilde{\eta} \in F(\tilde{X}) \simeq F(X) \times F(Z)$ 为对应于 (η, ξ) 的元素. 由命题 1.4.7 可知存在空间 $\tilde{Z}$, 带点态射 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ 以及 $\tilde{\xi} \in F(\tilde{Z})$ 使得 $\tilde{f}^*(\tilde{\xi}) = \tilde{\eta}$. 令 g 表示复合 $Z \hookrightarrow X \vee Z \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Z}$. 则有 $g^*(\tilde{\xi}) = \xi$, 并且对于全体 $k \geq 0$ 都有

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_k(Z) = [S^k, Z]_* & \xrightarrow{g_*} & [S^k, \tilde{Z}]_* = \pi_k(\tilde{Z}) \\
 & \searrow T_{\xi} & \swarrow T_{\tilde{\xi}} \\
 & F(S^k) &
 \end{array}$$

由于 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 均为万有元, 因此 g 诱导所有同伦群上的同构. 构造中可选 Z 与 $\tilde{Z}$ 为 CW-复形, 故 Whitehead 定理给出 $g: Z \rightarrow \tilde{Z}$ 是同伦等价. 从而 $[X, Z]_* \rightarrow [X, \tilde{Z}]_*$ 也为双射. 从而有交换图表

$$\begin{array}{ccc}
 [X, Z]_* & \xrightarrow{g_*} & [X, \tilde{Z}]_* \\
 & \searrow T_{\xi} & \swarrow T_{\tilde{\xi}} \\
 & F(X) &
 \end{array}$$

因此构成满射 (不过不一定是单射).

单射. 给定使得 $\eta := f^*(\xi) = g^*(\xi)$ 的 $f, g: X \rightarrow Z$, 以下说明 f 带点同伦于 g , 定义 $\tilde{X}$ 为同伦推出:

$$\begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{(f,g)} & Z \\ (\text{id}_X, \text{id}_X) \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \tilde{X} := X \sqcup_{X \vee X}^h Z. \end{array}$$

根据 Mayer-Vietoris 性质可知存在元素 $\tilde{\eta} \in F(\tilde{X})$ 对应于 (η, ξ) . 根据命题 1.4.7 又可取出 $\tilde{Z}$ 以及 $\tilde{\xi}$ 对应于 $(\tilde{X}, \tilde{\eta})$. 与满射部分相同的论证表明复合 $Z \rightarrow \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ 是同伦等价. 选取其同伦逆, 并与 $X \rightarrow \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ 复合, 得到虚线态射

$$\begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{(f,g)} & Z \\ (\text{id}_X, \text{id}_X) \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X & & \end{array}$$

推出中给定的同伦表明 f 与 g 均同伦于 $\tilde{f}$, 从而 $[f] = [g]$.

□

接下来说明每个广义上同调理论都可以被谱所表出.

命题 1.4.8. 令 $h^*: hS_*^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}}$ 为上同调理论. 则存在谱 E 使得 h^* 同构于由构造 1.3.4 所给出的上同调理论 E^* .

证明. 我们分两步解决这个问题:

第一步. 首先说明对于每个 $n \geq 0$, 函子 $h^n: (hS_*^{\geq 1})^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ 满足定理 1.4.5 所述条件. 楔和公理是显然的, 至于 Mayer-Vietoris 性质则考虑同伦推出图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow 1 & \lrcorner & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X, \end{array}$$

根据同伦推出图表的过渡性, 我们知道具有余纤维上的同伦等价 $C(k) \rightarrow C(j)$. 从而结合注记 1.4.4 给出长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} h^n(C(j)) & \xrightarrow{q^*} & h^n(X) & \xrightarrow{j^*} & h^n(B) & \xrightarrow{\partial} & h^{n+1}(C(j)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow i^* & & \downarrow l^* & & \downarrow \simeq \\ h^n(C(k)) & \xrightarrow{p^*} & h^n(A) & \xrightarrow{k^*} & h^n(C) & \xrightarrow{\partial} & h^{n+1}(C(k)). \end{array}$$

考虑使得 $k^*(\alpha) = l^*(\beta) \in h^n(C)$ 的 $\alpha \in h^n(A)$ 以及 $\beta \in h^n(B)$. 接下来需要做的是说明存在 $\gamma \in h^n(X)$ 使得 $\alpha = i^*(\gamma)$ 且 $\beta = j^*(\gamma)$. 而底部态射表明 $\partial k^*(\alpha) = 0$, 从而

$\partial l^*(\beta) = 0$, 而最右侧的同构表明 $\partial\beta = 0$, 又根据正合性表明存在 γ_0 使得 $\beta = j^*(\gamma_0)$. 不过此时 $i^*\gamma_0$ 不一定是 α , 因此考虑

$$k^*(\alpha - i^*\gamma_0) = k^*\alpha - k^*i^*\gamma_0 = 0$$

由此可知 $\alpha - i^*\gamma_0 \in \ker(k^*) = \text{im}(p^*)$. 先取 $\delta \in h^n(C(k))$ 使得 $p^*\delta = \alpha - i^*\gamma_0$, 再通过最左侧的同构将 δ 提升为 $\gamma_1 \in h^n(C(j))$. 令 $\gamma := \gamma_0 + q^*\gamma_1$ 即可. 从而 $h^n(X) \rightarrow h^n(B) \times_{h^n(C)} h^n(A)$.

第二步. 对每个 $n \geq 0$, 先用定理 1.4.5 取连通带点 CW-复形 Z_{n+1} , 使它在连通带点 CW-复形上表出 h^{n+1} , 再定义

$$E_n := \Omega Z_{n+1}.$$

对任意带点 CW-复形 X , 其约化纬悬 ΣX 是连通的, 因而有自然双射

$$[X, E_n]_* \simeq [\Sigma X, Z_{n+1}]_* \simeq h^{n+1}(\Sigma X) \simeq h^n(X).$$

所以 E_n 在全体带点 CW-复形上表出 h^n . 同理, ΩE_{n+1} 也表出 h^n ; 这一次可以在全体带点 CW-复形上使用 Yoneda 引理, 得到等价 $E_n \simeq \Omega E_{n+1}$. 这些等价组成所求的谱 E .

□

命题 1.4.9. 令 E 和 F 为谱, 且 $f^*: E^* \rightarrow F^*$ 为其对应上同调理论间的态射, 则存在谱间态射 $f: E \rightarrow F$ 使其诱导出 f^* .

证明. 对 $n \geq 0$, 具体展开 $f^n: E^n \rightarrow F^n$ 可发现其为 $[-, E_n]_* \rightarrow [-, F_n]_*$ 的形式. 根据 Yoneda 引理, 这给出带点空间之间的带点态射 $f_n: E_n \rightarrow F_n$. 而后说明其确实构成谱间态射, 为此考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} [-, E_n]_* & \xrightarrow{\sim} & [-, \Omega E_{n+1}]_* \\ \downarrow f_n \circ - & & \downarrow \Omega f_{n+1} \circ - \\ [-, F_n]_* & \xrightarrow{\sim} & [-, \Omega F_{n+1}]_* \end{array}$$

据 Yoneda 引理可给出交换图

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega E_{n+1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow \Omega f_{n+1} \\ F_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega F_{n+1} \end{array}$$

即为谱间态射.

□

第2章

稳定范畴

本章的目标是从稳定范畴的角度理解谱。核心思路很简单：在带点空间中纬悬与环路尚不可逆，而稳定化强制它们成为互逆等价；对 $\mathbf{Ani}$ 做这件事，就得到谱范畴 $\mathbf{Sp}$ 。后面的正合性、 t -结构与张量积，都是这一泛性质的展开。

首先，在 2.1 节中我们将回顾一些基础的范畴知识。

而后在 2.2 中我们以稳定范畴的结构与构造为主线，在此过程中不断探索并且探讨可表现范畴与稳定范畴的关联，给出稳定范畴的几个等价定义：

定理 令 $\mathcal{C}$ 为范畴，则以下条件等价：

1. $\mathcal{C}$ 带点、具有有限极限，且 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价；
2. $\mathcal{C}$ 带点、具有有限余极限，且 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是范畴等价；
3. $\mathcal{C}$ 带点、具有纤维与余纤维，且纤维列均为余纤维列；
4. $\mathcal{C}$ 带有有限极限与有限余极限，且 $\mathcal{C}$ 中交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

为 $\mathcal{C}$ 中的拉回图表当且仅当其推出图表；

5. $\mathcal{C}$ 带有有限极限与有限余极限，且有限极限与有限余极限可交换；
6. $\mathcal{C}$ 带点、具有有限极限，且零层取值函子 $\Omega^\infty: \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 是范畴等价。

满足上述任一等价条件时，称 $\mathcal{C}$ 是稳定的。

证明. 我们在后文的若干个命题中证明了这一点。

- 1. 与 2. 的等价性参见命题 2.1.33;

- 1. 与 3. 与 4. 的等价性参见定理 2.2.6;
- 1. 与 5. 的等价性参见命题 2.2.14;
- 1. 与 6. 的等价性参见命题 2.2.31.

□

而在 2.2.6 中我们引入 t-结构, 用它把稳定对象的“次数”与经典 Abel 范畴联系起来. 最后记录谱的张量积、映射谱及其给出的广义同调公式; Lurie 张量积的正式构造留到第二部分.

§ 2.1 基础知识

本节只回顾后文反复使用的工具: 局部化、直化/反直化、可表现范畴、对称幺半结构以及纬悬-环路伴随. 默认它们都在 $\mathbf{Cat}$ 内部用泛性质理解. 严格奠基时当然可以选择模型, 但模型不是后文定义的一部分; 这一区分可参见 [Haugseeng, 2025, § 1.8].

2.1.1 模型与具体呈现 (可跳读)

本小节说明如何用单纯模型范畴计算已经由泛性质定义的局部化和 (余) 极限. 若只关心本章的稳定化主线, 可以直接跳到下一小节. 模型范畴的背景可见 [香蕉空间, 2021].

定义-命题 2.1.1. 令 $\mathcal{M}$ 为单纯模型范畴, 则 $N^{\mathrm{hc}}(\mathcal{M}^\circ) \simeq \mathcal{M}[W^{-1}]$, 此处 $\mathcal{M}^\circ$ 是 $\mathcal{M}$ 中双纤维性对象所张成的全子范畴. 称这个局部化为 $\mathcal{M}$ 所呈现的范畴.

注记 2.1.2. 在上述命题中, 若 $\mathcal{M}$ 是组合的模型范畴, 则其所呈现的范畴是可表现的.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.3.4.20] □

定理 2.1.3. (识别同伦 (余) 极限) 对于组合的单纯模型范畴 A , 其同伦脉 $N^{\mathrm{hc}}(A^\circ)$ 具有全体极限以及余极限. 函子 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{N}(A^\circ)$ 的余极限和极限分别刻画为

$$\varinjlim(F) \simeq R(\mathrm{holim}_{\mathrm{Path}(\mathcal{I})} \tilde{F}), \quad \varprojlim(F) \simeq Q(\mathrm{holim}_{\mathrm{Path}(\mathcal{I})} \tilde{F})$$

此处 $\tilde{F}: \mathrm{Path}(\mathcal{I}) \rightarrow A^\circ$ 为 F 在 **实现-脉伴随** $\mathrm{Path} \dashv N^{\mathrm{hc}}$ 的左伴随对象.

证明. [Lurie, 2009b, Theorem 4.2.4.1] □

因此, 给拓扑空间的 1-范畴 $\mathbf{Top}_{(1)}$ 配上 Quillen–Serre 模型结构后, 其所呈现的范畴是 $\mathcal{S}$; 取适当的纤维-余纤维模型计算 (余) 极限, 就得到 $\mathcal{S}$ 中的同伦 (余) 极限.

定理 2.1.4. (同伦假设) 有范畴等价

$$\mathbf{Top}_{(1)}[W^{-1}] \simeq \mathbf{Ani},$$

此处 W 是弱同伦等价所构成的态射类. 因此有些文献也称 $\mathbf{Ani}$ 为空间所构成的范畴.

2.1.2 实现-脉伴随

定理 2.1.5. 令 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 为范畴, 且 $\mathcal{D}$ 余完备. 则沿 Yoneda 嵌入 $y: \mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ 给出范畴等价

$$y^*: \text{Fun}^L(\text{PSh}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

定理 2.1.6. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, $\mathcal{D}$ 为余完备范畴. 考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \downarrow y & \searrow F & \\ \text{PSh}(\mathcal{C}) & & \mathcal{D} \end{array}$$

有伴随函子

$$\begin{array}{ccc} \text{PSh}(\mathcal{C}) & \xrightleftharpoons[\text{N}_F]{|-|_F} & \mathcal{D} \\ & \perp & \end{array}$$

其中 $|-|_F$ 定义为左 Kan 延拓 $\text{Lan}_y F$, 而 N_F 将 $d \in \mathcal{D}$ 映为预层 $\text{N}_F(d): c \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d)$.

证明. [Lurie, 2018a, Tag 04BF] □

2.1.3 Beck–Chevalley 自然变换

定义 2.1.7. 考虑范畴的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{q'_*} & \mathcal{D}' \\ \downarrow p'_* & & \downarrow p_* \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{q_*} & \mathcal{D}. \end{array}$$

且给定自然等价 $\eta: p_* q'_* \simeq q_* p'_*$, 则称该图表为**左可伴随**的, 是指 q_* 和 q'_* 具有左伴随且态射

$$\gamma: q^* p_* \xrightarrow{u} q^* p_* q'_* q'^* \xrightarrow{\eta} q^* q_* p'_* q'^* \xrightarrow{c} p'_* q'^*$$

为等价, 此处 u 是 $q'^* \dashv q'_*$ 的单位, c 是 $q^* \dashv q_*$ 的余单位. 此时也称 γ 是**推拉变换**, 或称 **左 Beck–Chevalley 伴随变换**.

2.1.4 Grothendieck–Lurie 构造

首先, 我们来粗略回忆一下直化与反直化. 这是一种在范畴上的“纤维丛”结构.

定义 2.1.8. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 令 $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子.

- 称 $\mathcal{U}$ 中态射 $f: X \rightarrow Y$ 为 **p -推出**的是指对于任意 $\mathcal{U}$ 中态射 $g: X \rightarrow Z$, 它们所构成的尖角 $\Delta_0^2 \rightarrow \mathcal{U}$ 若复合上 p 后在 $\mathcal{C}$ 中具有填充 $\sigma: \Delta^2 \rightarrow \mathcal{C}$, 则存在 (在可缩意义下唯

一的) 填充 $\tau: \Delta^2 \rightarrow \mathcal{E}$ 使得 $p(\tau) = \sigma$. 使用图表示意即为

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & \nearrow \tau & \\ Y & & \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} p(X) & \xrightarrow{p(g)} & p(Z) \\ p(f) \downarrow & \nearrow \sigma & \\ p(Y) & & \end{array}$$

更加形式化地说, 称 $f: X \rightarrow Y$ 是 p -推出态射是指对于任意 $Z \in \mathcal{U}$, 图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Z) \\ p_* \downarrow & \lrcorner & \downarrow p_* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p(Y), p(Z)) & \xrightarrow{p(f)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p(X), p(Z)) \end{array}$$

为 $\mathbf{Ani}$ 中的拉回图表, 即为同伦拉回图表.

- 令 $p\text{-coCart} \subset \mathbf{Ar}(\mathcal{U})$ 为由 p -推出态射所生成的全子范畴. 则称 p 是**推出纤维化**是指对于以下交换图表

$$\begin{array}{ccccc} p\text{-coCart} & & & & p \\ & \searrow q & & & \downarrow \\ & & P & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \\ & \searrow s & \downarrow \lrcorner & & \downarrow s \\ & & \mathcal{U} & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} \end{array}$$

中虚线所示的典范态射为同构.

换句话说, 称 p 为推出纤维化是指对于任意 $\mathcal{C}$ 中在 p 的本质像内的对象 X , 从其出发的全体态射 $X \rightarrow Y$ 在 p 下的原像均为 p -推出态射.

定理 2.1.9. (直化/反直化, Lurie) 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. 令 $\mathrm{coCart}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Cat}_{/\mathcal{C}}$ 为由打到 $\mathcal{C}$ 的推出纤维化为对象且态射为保持推出边的态射所张成的非全子范畴, 则具有范畴等价

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathrm{St}} & \\ \mathrm{coCart}(\mathcal{C}) & \simeq & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Cat}) \\ & \xleftarrow{\mathrm{Un}} & \end{array}$$

将 St 和 Un 分别称为直化和反直化, 事实上, 对于函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Cat}$, 其反直化为取元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} F$. 而直化的具体操作我们留在下文进行构造.

证明. [Lurie, 2009b, § 3.2] □

以下给出直化的刻画. 给定推出纤维化 $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$, 我们构建其对应函子 $\mathrm{St}(p): \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Cat}$:

- 对象: 对于 $X \in \mathcal{C}$, $\text{St}(p)(X)$ 定义为纤维

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow X \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{p} & \mathcal{C} \end{array}$$

- 态射: 由定义可知 $p\text{-coCart} \simeq \text{Ar}(\mathcal{C}) \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U}$, 而后考虑 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \rightarrow Y$, 可构建拉回图表

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(X) & \longrightarrow & p\text{-coCart} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \{\alpha\} \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U} & \longrightarrow & \text{Ar}(\mathcal{C}) \times_{s,\mathcal{C}} \mathcal{U} \end{array}$$

而右侧纵向箭头为同构表明拉回后仍为同构, 从而可以得到同伦等价 $\{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow p^{-1}(X)$, 它具有截面 $p^{-1}(X) \rightarrow \{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U})$. 而后利用目标函子 $t: \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ 以及复合 $p \circ t: \text{Ar}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{C}$ 可得

$$p^{-1}(X) \rightarrow \{\alpha\} \times_{\text{Ar}(\mathcal{C})} \text{Ar}(\mathcal{U}) \xrightarrow{t} \{y\} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{U} \simeq p^{-1}(Y).$$

定义 2.1.10. 称 p 为**左纤维化**是指其为满足以下等价条件的推出纤维化:

1. $\text{St}(p): \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ 穿过 Ani ;
2. 其导出纤维为生象, 即在 Cat 中取纤维所得到的结果为生象;
3. p 是保守函子, 即 $\mathcal{U}$ 中态射 f 为同构当且仅当 $p(f)$ 为同构;
4. $\mathcal{U}$ 中任意态射均为 p -推出态射.

虽然这套定义与 [Lurie, 2009b] 中定义并不一致, 但是可以验证在相差范畴等价的意义下二者是一致的.

定理 2.1.11. (直化/反直化, 生象版本) 令 $\text{Left}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Cat}/_{\mathcal{C}}$ 为左纤维化所构成的全子范畴, 则定理 2.1.9 可转化为

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{St}} & \\ \text{Left}(\mathcal{C}) & \simeq & \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ani}) \\ & \xleftarrow{\text{Un}} & \end{array}$$

2.1.5 反射局部化 (左 Bousfield 局部化)

本小节的主角是反射子范畴: 一个函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 具有全忠实右伴随时, $\mathcal{D}$ 可视为 $\mathcal{C}$ 中的局部对象, 而 F 就是强制指定态射变为等价的局部化. 本文沿用 “左 Bousfield 局部化” 这一名称, 但定义本身不依赖模型范畴; 参见 [Haugse, 2025, § 5.3, § 10.4].

定义-命题 2.1.12. 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 给定伴随 $\mathcal{C} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{smallmatrix} \mathcal{D}$ 则:

1. G 为全忠实函子当且仅当余单位 $c: FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ 为同构;
2. $\mathcal{C}$ 中态射 $X \xrightarrow{f} Y$ 在 F 下的像为同构当且仅当其为左 G -局部同构, 即对于任意 $D \in \mathcal{D}$, f 均诱导态射生象上的同构

$$f^*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GD) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GD).$$

常常舍弃“左”而以 G -局部同构来指代左 G -局部同构.

此外, 若 1. 的等价条件成立, 则:

3. 单位 $u: C \rightarrow GFC$ 总是 G -局部同构;
4. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为关于 G -局部同构的局部化.

此时称 F 为 $\mathcal{C}$ 关于 G -局部同构的**左 Bousfield 局部化**. 特别地, 此时 $\mathcal{C}[W_G^{-1}]$ 是局部小范畴, W_G 为 G -局部同构所构成的集合. 对偶地, 有具有**右 Bousfield 局部化**.

证明. [Hebestreit, 2021, I.58] □

接下来我们探究范畴局部化为 Bousfield 局部化的条件.

命题 2.1.13. 令 $W \subseteq \pi_0 \text{core}(\text{Ar}(\mathcal{C}))$ 为一族态射, 且记 $\mathcal{C}$ 关于 W 的局部化为 $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$. 则 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 中态射 $\tau: pX \rightarrow Y$ 将 X 表为 Y 在 p 下的右伴随对象当且仅当 τ 是同构, 且 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ani}$ 将 W 中的全体态射映为同构.

特别地, p 的右伴随 G 是自动全忠实的且其本质像为左 G -局部对象所张成的全子范畴, 即使得 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ani}$ 将左 G -局部同构映为同构的 $C \in \mathcal{C}$.

证明. [Hebestreit, 2021, I.59]. □

推论 2.1.14. 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为左 Bousfield 局部化, 且 $\mathcal{C}$ 为完备或余完备的, 则 $\mathcal{D}$ 也是完备或余完备的. 更进一步, 对于图表 $K: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$, 其余极限可刻画为

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} K \simeq F(\varinjlim_{\mathcal{I}} GK)$$

注记 2.1.15. $\varprojlim$ 若存在则可直接被刻画, 因为 G 为右伴随与极限交换.

证明. [Hebestreit, 2021, I.61] □

命题 2.1.16. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴且 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为自函子, 并记 $FC \subseteq \mathcal{C}$ 为其本质像. 则以下条件等价:

1. 存在函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 及其全忠实右伴随 $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $g \circ f \simeq F$;

2. 将 F 视为 $\mathcal{C} \rightarrow FC$ 这一函子时, F 是含入函子 $FC \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的左伴随;
3. 存在从 $\text{id}_{\mathcal{C}}$ 到 F 的自然变换

$$\alpha: \mathcal{C} \times [1] \longrightarrow \mathcal{C},$$

使得对于任意 $C \in \mathcal{C}$, 两个态射

$$F(\alpha(C)), \alpha(F(C)): FC \longrightarrow FFC$$

都是等价.

证明. [Lurie, 2009b, Proposition 5.2.7.4]. □

2.1.6 可表现范畴

稳定化会涉及无穷极限和余极限, 因此我们需要一类既足够完备、又仍受一小组对象控制的范畴. 可表现范畴正是这个尺度: 它们内在地定义为可达且余完备的范畴, 组合模型范畴只是其常见来源之一; 参见 [Haugseeng, 2025, § 10.1].

构造 2.1.17. 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴, 则其**统联** $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$ 定义为 $\mathbf{Cat}$ 中的推出

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C} \times \{0\} \times \mathcal{D}) \sqcup (\mathcal{C} \times \{1\} \times \mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{C} \times [1] \times \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{C} \times \{0\}) \times (\{1\} \times \mathcal{D}) & \xrightarrow{\quad \ulcorner \quad} & \mathcal{C} \star \mathcal{D} \end{array}$$

不难发现上述推出的直观就是给出一个在 $\{0\}$ 处为 $\mathcal{C}$ 而在 $\{1\}$ 处为 $\mathcal{D}$ 的东西.

记 $\mathcal{C}^{\triangleleft} := [0] \star \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 的左锥, 这相当于在 $\mathcal{C}$ 中自由地插入了一个始对象, 类似地, 记 $\mathcal{C}^{\triangleright} := \mathcal{C} \star [0]$ 为 $\mathcal{C}$ 的右锥, 这相当于在 $\mathcal{C}$ 中自由地插入了一个终对象.

定义 2.1.18. 令 $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ 为范畴,

1. 称 $\mathcal{I}$ 是 κ -**滤过的**, 是指对每个 κ -小范畴 $\mathcal{J}$, 每个函子 $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ 都可以延拓为 $\mathcal{J}^{\triangleright} \rightarrow \mathcal{I}$. 当 $\kappa = \aleph_0$ 时, 简称其为**滤过的**;
2. 称 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 的余极限为 κ -**滤过的**是指 $\mathcal{I}$ 为 κ -滤过范畴.

注记 2.1.19. 结合前文对右锥的说明, κ -滤过的直观是: 任意 κ -小图表都能被一个相容的余锥接住. 在偏序集的情形, 这就是任意 κ -小子集都有共同上界.

定义 2.1.20. (有限范畴) 记 $\mathbf{Cat}^{\text{fin}} \subseteq \mathbf{Cat}$ 为包含 $\emptyset, *$ 和 $[1]$ 且关于推出封闭的最小范畴. 则称小范畴 $\mathcal{I}$ 是**有限的**, 是指 $\mathcal{I} \in \mathbf{Cat}^{\text{fin}}$.

定义 2.1.21. 令 κ 为正则基数, 且 $\mathcal{C}$ 为范畴, 称 $\mathcal{C}$ 是 κ -**本质小**的是指

对象本质小 $\pi_0 \text{core}(\mathcal{C})$ 是 κ -小集合;

态射本质小 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, $\pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是 κ -小集合, 且对每个 $n \geq 1$ 与基点 $\alpha: X \rightarrow Y$, 群 $\pi_n(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \alpha)$ 也是 κ -小的.

称 $\mathcal{C}$ 是本质小的是指存在 κ 使得 $\mathcal{C}$ 是 κ -本质小的.

构造 2.1.22. 令 κ 为正则基数, 且 $\mathcal{C}$ 为本质小范畴. 令 $\operatorname{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{PSh}(\mathcal{C})$ 为由使得元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} E$ 为 κ -滤过范畴的预层 $E: \mathcal{C}^{\operatorname{op}} \rightarrow \mathbf{Ani}$ 所张成的全子范畴. 当 $\kappa = \aleph_0$ 时, $\operatorname{Ind}(\mathcal{C}) := \operatorname{Ind}_{\aleph_0}(\mathcal{C})$.

注意到 Yoneda 嵌入 $y: \mathcal{C} \rightarrow \operatorname{PSh}(\mathcal{C})$ 会穿过 $\operatorname{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C})$.

定义 2.1.23. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 且 κ 为正则基数.

1. 称 $\mathcal{C}$ 中对象 X 为 κ -紧的是指 $\operatorname{Hom}(X, -)$ 保持 κ -滤过余极限. 记 $\mathcal{C}^{\kappa} \subseteq \mathcal{C}$ 为由 κ -紧对象所构成的全子范畴;
2. 称 $\mathcal{C}$ 为 κ -可达的, 是指存在小范畴 $\mathcal{C}_0$ 使得 $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C}_0)$; 称 $\mathcal{C}$ 是可达的, 是指它对某个正则基数 κ 是 κ -可达的;
3. 称 $\mathcal{C}$ 是 κ -紧生成的, 是指其 κ -可达且具有任意小余极限. 称 $\mathcal{C}$ 是可表现的, 是指它可达且余完备; 等价地, 它对某个 κ 是 κ -紧生成的.

全体可表现范畴以及其间作为左伴随的函子所构成的范畴记为 Pr^L , 同理, 全体可表现范畴以及其间作为右伴随函子所构成的范畴记为 Pr^R .

警告 2.1.24. 此处会有一些名词问题, 有些资料 (比如 [Lurie, 2018a, Tag 0673]) 会将 κ -可达范畴称为 κ -紧生成范畴, 本文所沿用的是 [Lurie, 2009b, Definition 5.5.7.1] 所用名词.

定理 2.1.25. (伴随函子定理) 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为可表现范畴之间的函子. 则:

1. F 是左伴随当且仅当它保持全体小余极限;
2. F 是右伴随当且仅当它可达且保持全体小极限. 这里“可达”等价于 F 对某个正则基数 κ 保持 κ -滤过余极限.

证明. [Lurie, 2009b, Corollary 5.5.2.9]. □

命题 2.1.26. 令 $\mathcal{C}$ 为具有所有小余极限的范畴且 $\mathcal{C}^{\kappa}$ 是小范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 是 κ -紧生成的;
2. $\mathcal{C}$ 中每个对象均可写为 κ -紧对象的小余极限;
3. 若 $X \rightarrow Y$ 为使得

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$$

对于所有的 $Z \in \mathcal{C}^{\kappa}$ 均为等价的态射, 则 $X \rightarrow Y$ 是等价.

命题 2.1.27. 令 $\mathcal{C}$ 为 κ -紧生成范畴, 则由 $\mathcal{C}^\kappa \rightarrow \mathcal{C}$ 所诱导的 $\text{Ind}_\kappa(\mathcal{C}^\kappa) \rightarrow \mathcal{C}$ 是左 Bousfield 局部化.

推论 2.1.28. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则其可表现当且仅当存在 $\mathcal{C}_0$ 使得 $\mathcal{C}$ 为 $\text{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 的左 Bousfield 局部化.

命题 2.1.29. Pr^L 和 Pr^R 具有全体小极限, 且 $\text{Pr}^L \rightarrow \widehat{\text{Cat}}$ 和 $\text{Pr}^R \rightarrow \widehat{\text{Cat}}$ 保持这些小极限.

证明. [Lurie, 2009b, Proposition 5.5.3.13] 以及 [Lurie, 2009b, Proposition 5.5.3.18]. $\square$

推论 2.1.30. Pr^L 上的余极限与其在 $\widehat{\text{Cat}}$ 中的余极限并不一致. 相反, 它可以通过反变的范畴等价 $\text{Pr}^L \simeq (\text{Pr}^R)^{\text{op}}$ 上的对偶图表, 并且过渡到极限给出.

2.1.7 纬悬与环路

纬悬与环路是后文真正需要的一对伴随. 它们只用零对象及有限推出、拉回定义, 因此完全不依赖空间或模型范畴的具体选择.

定义 2.1.31. 称范畴 $\mathcal{C}$ 是带点的是指它有零对象.

对于带有终对象的范畴 $\mathcal{C}$, 称其带点化是考虑仰范畴 $\mathcal{C}_{*/}$, 简记作 $\mathcal{C}_*$.

定义 2.1.32. • 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限余极限的范畴, 则 $\mathcal{C}$ 上的纬悬函子定义为 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto 0 \sqcup_X 0$;

• 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限的范畴, 则 $\mathcal{C}$ 上的环路函子定义为 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto 0 \times_X 0$.

命题 2.1.33. 若 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限和余极限的带点范畴, 则具有伴随对

$$\Sigma \dashv \Omega.$$

证明. 考虑 $X, Y \in \mathcal{C}_*$, 则

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(\Sigma X, Y) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0 \sqcup_X 0, Y) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0, Y) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(0, Y) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_*}(X, \Omega Y). \end{aligned}$$

这显然具有函子性从而构成伴随. $\square$

当取 $\mathcal{C} = \text{Ani}_* \simeq \text{Top}_*$ 时, 所得到的纬悬函子与环路函子即为上一章中所定义的纬悬与环路函子.

§ 2.2 稳定范畴

本节分三步走. 首先用“环路可逆”定义稳定范畴, 并把它改写为“拉回即推出”的正合性; 然后与 Abel 范畴及三角范畴比较; 最后用环路塔的极限定义稳定化与谱.

注意到对于任意谱 S , 都有典范等价 $\Omega S \simeq S[-1]$; 而在带点生象范畴 $\mathbf{Ani}_*$ 中, 定义 2.1.32 所给出的 Ω 并不是范畴等价. 因此为研究谱的结构, 我们首先研究那些使 Ω 可逆的范畴.

2.2.1 定义

定义 2.2.1. 称带点范畴 $\mathcal{C}$ 是**稳定的**, 是指其带有有限极限且 $\Omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价.

若 $\mathcal{C}$ 稳定, 则有限余极限可以由有限极限与 Ω 的逆等价构造出来, 而 $\Sigma \dashv \Omega$ 中的 Σ 正是 Ω 的逆等价. 因此

命题 2.2.2. 以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 为稳定范畴;
2. $\mathcal{C}$ 有有限余极限, 且 $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为范畴等价;

接下来我们从链的角度来看待稳定范畴, 回忆到在定义 1.1.3 中我们定义了同伦纤维与同伦余纤维, 而根据定理 2.1.3 可将定义中的同伦拉回和同伦推出变为 $\mathbf{Ani}$ (当然要将空间先转化为生象) 这一范畴中的拉回和推出, 因此这一定义也可以延拓到 $\mathcal{C}$ 上.

构造 2.2.3. 称带点范畴 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**复形**是指有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

即 gf 同伦于 0. 在 [Lurie, 2017] 中称其为**三角**, 在 [Cnossen, 2025b] 中称其为 **null-sequence**.

定义 2.2.4. 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴,

- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**纤维列**是指其对应的交换图同时为拉回图表, 此时称 X 是 g 的**纤维**, 有时也记为 $X = \mathrm{fib}(g)$;
- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**余纤维列**是指其对应的交换图同时为推出图表, 此时称 Z 是 f 的**余纤维**, 有时也记为 $Z = \mathrm{cofib}(f)$;
- 称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为**正合列**是指其既是纤维列又是余纤维列.

注记 2.2.5. 可以把正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 直观地理解为“纤维与余纤维是同一份资料”. 在一般稳定范畴中并没有预先给定的像、核或单态射概念; “ $\ker g = \operatorname{im} f$ ”只是经由 t-结构取心之后的 Abel 范畴类比.

因此可以得到以下定理:

定理 2.2.6. 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 为稳定范畴;
2. $\mathcal{C}$ 有有限极限与有限余极限, 且 $\mathcal{C}$ 中交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

为 $\mathcal{C}$ 中的拉回图表当且仅当其为推出图表;

3. $\mathcal{C}$ 具有纤维与余纤维, 且复形 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为纤维列当且仅当其为余纤维列.

证明.

1. $\Rightarrow$ 2. 首先说明当 $\mathcal{C}$ 稳定时, $\mathcal{C}$ 中形如 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 的图表总是能够张成拉回图表, 并且这件事情具有函子性. 从而考虑 $P \subseteq \operatorname{Fun}([1] \times [1], \mathcal{C})$ 表示全体拉回图表所构成的全子范畴, 我们需要说明具有范畴等价

$$P \xrightarrow{\sim} \operatorname{Fun} \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \\ \bullet & & \end{array}, \mathcal{C} \right).$$

为此考虑 $\mathcal{C}$ 中图表

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega X & \longrightarrow & \Omega Z & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow & & \\ \Omega Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow & & \vdots \\ & & 0 & \longrightarrow & Z & \dashrightarrow & \Omega^{-1} A. \end{array}$$

首先不看带虚线箭头的部分, 根据拉回的过渡性, 不难验证这一堆拉回是合法的. 且如果 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 若能张成拉回图表, 则其应当为 $Y \rightarrow \Omega^{-1} A \leftarrow Z$ 的拉回图表. 因此根

据 Ω 为范畴等价可知 Ω^{-1} 也为范畴等价, 从而由于范畴等价伴随等价, Ω^{-1} 保持拉回, 从而

$$\Omega^{-1} \left(\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & \Omega Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Omega Z & \longrightarrow & A \end{array} \right)$$

. 为拉回图表, 而这一操作具有函子性, 因此确实具有范畴等价.

从而考虑由 $Z \leftarrow X \rightarrow Y$ 所张成的拉回图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W. \end{array}$$

记 $\mathcal{D} = (Y \leftarrow X \rightarrow Z)$, 并记 $\mathcal{A} = (A \xleftarrow{\text{id}_A} A \xrightarrow{\text{id}_A} A)$. 将它们补成拉回方块, 分别得到

$$\mathcal{D}^\square = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W \end{array} \quad \text{和} \quad \mathcal{A}^\square = \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & \lrcorner & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A. \end{array}$$

因而补全函子给出

$$\text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{D}^\square, \mathcal{A}^\square) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, A).$$

而根据极限的定义可知, $W = Z \sqcup_X Y$, 因此 $\mathcal{C}$ 中拉回自动为推出;

2. $\Rightarrow$ 3. 只需令 $W = 0$ 即可;

3. $\Rightarrow$ 1. 只需令 $Y = 0$, 此时 $Z = \Omega X$, 从而 $\Sigma \Omega X \simeq X$.

□

2.2.2 稳定范畴与 Abel 范畴

以下比较稳定范畴与 **Abel 范畴**.

定义 2.2.7. 令 $\mathcal{C}$ 为带点范畴, 且具有有限积与余积, 则

1. 称 $\mathcal{C}$ 是**半加性的**, 是指对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有自然同构 $X \sqcup Y \xrightarrow[\sim]{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \times Y$ 此时记 $X \sqcup Y \simeq X \oplus Y \simeq X \times Y$;
2. 称 $\mathcal{C}$ 为**加性的**, 是指其半加性且对于任意 $X \in \mathcal{C}$ 都有自然同构

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \oplus X.$$

命题 2.2.8. 稳定范畴均为加性范畴.

证明. 首先稳定范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限极限与有限余极限, 且拉回同时为推出表明 $X \times Y \simeq X \sqcup Y$, 即为双积, 因此半加性. 而后考虑推出

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow (\text{id}_X, \text{id}_X) \\ X & \xrightarrow{(0, \text{id}_X)} & X \times X \end{array}$$

由 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴知这是拉回图表, 从而有自然同构

$$X \oplus X \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X \oplus X.$$

□

注记 2.2.9. (稳定范畴与 Abel 范畴) 可将定理 2.2.6 中的 3. 与 Abel 范畴的定义进行比较, 回忆到 (AB2) 说的是每个单态射都是某个态射的核, 每个满态射都是某个态射的余核. 不难看出这等价于说复形

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{p} C$$

中若 i 为单态射且 p 为满态射, 则该序列为纤维列当且仅当其为余纤维列.

稳定范畴中, 定理 2.2.6 表明我们将单态射和满态射的条件放宽到了一般的态射上, 即复形 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 为纤维列当且仅当其为余纤维列. 因此稳定范畴可以视为 Abel 1-范畴的同伦相容推广.

但是值得注意的是, 除平凡范畴外, 把 Abel 范畴仅视为 1-范畴时, 它不会是稳定范畴. 稳定性依赖映射空间中的高阶同伦信息.

由于稳定范畴是 Abel 范畴的推广, 因此在其上讨论正合函子也是比较方便的. 在此我们先证明一个范畴论上常用的引理.

事实 2.2.10. 若在 Cat 中有 $\mathcal{I} \simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{I}_j$, 且令 $T: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 为使得对于任意 $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{I}_j \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$ 都具有余极限的函子, 则这些余极限构成函子 $\bar{T}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, 使得 $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} T(i) \simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \bar{T}(j)$. 事实上由此可以推出余极限互相交换.

引理 2.2.11. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则 $\mathcal{C}$ 余完备当且仅当其具有推出以及任意小余积. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 保持全体小余极限当且仅当其保持推出以及任意小余积. 对偶地得到极限的情况.

证明. 任意小余极限都可以由小余积和推出组装而成; 保持性的陈述对同一构造逐步应用即可. 这是纯粹的范畴论结论, 不需要选择 Joyal 或其它模型; 可参见 [Lurie, 2009b, Corollary 4.4.2.6]. □

注记 2.2.12. 我们可以对其进行推广, 给定正则基数 κ , 上述引理的内容都可以变为 κ -小的情况 (只需将 Cat 改为 $\text{Cat}^{<\kappa}$ 即可). 因此取 κ 为 $\aleph_0$ 时可知

有限极限 = 拉回 + 终对象, 有限余极限 = 推出 + 始对象.

推论 2.2.13. 稳定范畴均带有有限极限以及余极限, 且稳定范畴间的正合函子保持这些极限以及余极限.

更进一步, [Groth, 2016] 给出了稳定范畴的另一刻画.

命题 2.2.14. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则其为稳定的当且仅当它具有有限极限与有限余极限, 且有限极限与有限余极限可交换.

证明. 一个方向是显然的, 我们只证明另一个方向, 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限与有限余极限的范畴, 且有限极限与有限余极限相交换, 以下说明 $\mathcal{C}$ 是稳定的, 首先由于有限极限与有限余极限可交换, 因此空极限与空余极限也可交换, 从而得知 $\mathcal{C}$ 带点. 接下来说明 Ω 是等价, 为此对于 $X \in \mathcal{C}$, 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & X & \longrightarrow & X. \end{array}$$

沿着行进行推出, 得到 $0 \rightarrow \Sigma X \leftarrow 0$, 再进行一次拉回得到 $\Omega \Sigma X$ (即整个图表先沿行推出再沿列拉回). 整个图表沿列进行拉回得到 $X \leftarrow X \rightarrow X$, 再进行推出得到还是 X , 因此拉回与推出的交换性说明 $X \xrightarrow{\sim} \Omega \Sigma X$ 为同构. 同理说明 $\Sigma \Omega X \xrightarrow{\sim} X$ 为同构, 因此得知 Ω 为范畴等价, 即 $\mathcal{C}$ 稳定. $\square$

以下介绍正合函子.

定义 2.2.15. 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴.

- 若 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 均带点, 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**带点**的是指其保持零对象;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**左正合**的是指 F 保持有限极限;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**右正合**的是指 F 保持有限余极限;
- 称函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是**正合**的是指其左正合且右正合.

命题 2.2.16. 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为稳定范畴之间的带点函子, 则以下条件等价:

1. F 是正合的;
2. F 保持始对象以及推出;
3. F 保持终对象以及拉回

这由引理 2.2.11 立刻得出. 由于正合函子在复合下是封闭的, 因此可以得到以下定义:

定义 2.2.17. 全体小稳定范畴所构成的范畴 $\text{Cat}^{\text{st}} \subset \text{Cat}$ 是由稳定范畴及其间正合函子所构成的非全子范畴.

以下讨论更多一点的性质.

命题 2.2.18. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则对于任意范畴 $\mathcal{I}$, 都有 $\text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ 为稳定范畴.

证明. 一切可以约化为函子范畴的极限与余极限是逐点计算的. $\square$

定理 2.2.19. Cat^{st} 是完备的, 且含入函子 $\text{Cat}^{\text{st}} \hookrightarrow \text{Cat}$ 保持小极限.

证明. 利用引理 2.2.11 说明以下内容:

- 一族稳定范畴 $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$ 稳定范畴的乘积 $\mathcal{C} = \prod_{\alpha \in A} \mathcal{C}_\alpha$ 仍稳定, 且对于稳定范畴 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 正合当且仅当 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\alpha$ 均正合;
- 稳定范畴的拉回仍稳定, 且正合函子关于拉回封闭.

前者显然带点, 至于极限 = 余极限可以约化为极限与余极限的逐点计算. 以下考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{G'} & \mathcal{C} \\ F' \downarrow & \lrcorner & \downarrow F \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{G} & \mathcal{D}. \end{array}$$

其中 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ 均为稳定范畴, 且 F 和 G 均为正合函子. 根据 [Lurie, 2009b, Theorem 5.4.5.5] 可知空图表在 F' 和 G' 会保持有限余极限, 由于 $\mathcal{C}'$ 的极限也可经由 G' 和 F' 计算得到, 从而 $\mathcal{C}'$ 稳定. 从而 G' 与 F' 自动正合. $\square$

完全类似地, 可以说明

定理 2.2.20. Cat^{st} 关于滤过余极限封闭, 并且 $\text{Cat}^{\text{st}} \hookrightarrow \text{Cat}$ 保持这些滤过余极限.

证明. 此处稳定性有滤过余极限的构造可知, 可以将滤过余极限中的纤维列提升到某一项中进行具体计算. $\square$

定义 2.2.21. 将全体带有有限极限的范畴及其间左正合函子所生成的 Cat 的子范畴记为 Cat^{lex} .

2.2.3 稳定范畴与三角范畴

接下来类比稳定范畴与三角范畴, 我们将看到稳定范畴在 1-范畴上的投影会自然地具有三角结构, 虽然并不是所有的三角范畴都会是某个稳定范畴的投影. 默认读者具有三角范畴的相关知识.

在上一小节我们已然说明, 当 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴时, Ω 与 Σ 互逆, 结合在 Top 中的观察, 我们知道 Σ 表示提升一个维数, 而 Ω 表示降低一个维数, 因此我们可以给出以下符号约定:

记号 2.2.22. 若 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 且 $n \geq 0$, 记 $X \mapsto X[n]$ 为 $\Sigma^n X$. 若 $n \leq 0$, 则记 $X \mapsto X[n]$ 为 $\Omega^{-n} X$. 我们同样以这种记号标记在同伦范畴 $h\mathcal{C}$ 中的情况.

定义 2.2.23. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴. 给定 $h\mathcal{C}$ 中的图表

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1].$$

称该图表为**好三角**是指存在 $\mathcal{C}$ 中的图表

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tilde{g} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & W. \end{array}$$

使得 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 分别对应于 f 和 g , 且 $h: Z \rightarrow X[1]$ 是 $\tilde{h}$ 复合上 $W \simeq X[1]$.

注记 2.2.24. 不难发现由推出的过渡性, 上图可以转化为 $W \simeq \Sigma X = X[1]$. 这样一来你的三角就具有典范的定义, 不会出现不典范的态射, 上述条件还可以继续放宽到带有余纤维范畴上.

定理 2.2.25. 上述定义所给出的 $h\mathcal{C}$ 确实是三角范畴.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.1.2.14] □

警告 2.2.26. 同伦 1-范畴 $h\mathcal{C}$ 会丢掉高阶相容性, 因此并非每个三角范畴都自动带有稳定 ∞ -范畴提升. [Muro et al., 2007] 给出了不能来自稳定模型范畴的例子. 对导出范畴和谱范畴, 本讲义始终保留其稳定 ∞ -范畴提升, 三角结构只是取 $h\mathcal{C}$ 后的影子.

定义 2.2.27. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 且 $X, Y \in \mathcal{C}$ 为对象. 令 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y)$ 表示 Abel 群 $\mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(X[-n], Y)$. 若 n 为负数, 则 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, Y) = \pi_{-n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

2.2.4 谱的范畴

本节进入正题: 如何把一个范畴变为稳定范畴? 定义 2.2.1 已经暗示了答案——强制环路函子 Ω 可逆. 与先选一个“谱的模型范畴”不同, 下面直接在 $\mathbf{Cat}$ 中取环路塔的极限; 这个定义同时记录对象、态射与全部高阶相容性.

定义 2.2.28. 令 $\mathcal{C}$ 为带有有限极限的范畴, 定义其**稳定化** $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 为在 $\widehat{\mathbf{Cat}}$ 中的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{op}}$ -型极限

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) := \varprojlim \left(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \right)$$

$\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 中对象称为 $\mathcal{C}$ 中的**谱对象**. 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}$ 时, 将 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 简记为 $\mathbf{Sp}$, 称为**谱的范畴**.

根据极限的具体刻画, $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 中对象可写成一族带点对象 $(X_i)_{i \geq 0}$ 配上相容等价 $X_i \simeq \Omega X_{i+1}$. 当 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}$ 时, 这正是定义 1.2.6 中 Ω -谱的相干版本.

例 2.2.29. 若 A 是 Abel 群, 则 Eilenberg–MacLane 空间列 $(K(A, n))_{n \geq 0}$ 给出 Eilenberg–MacLane 谱 $HA \in \mathbf{Sp}$.

不难发现这般定义的稳定化会带有自然的投影函子 $\Omega^{\infty-n}: \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.

定理 2.2.30. $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 是自动稳定的.

证明. [Cnossen, 2025b, Theorem 3.4.5]. □

从而可以给出稳定范畴的又一大判别条件.

命题 2.2.31. 令 $\mathcal{C}$ 为带点且具有有限极限的范畴, 则 $\mathcal{C}$ 稳定当且仅当零层取值函子 $\Omega^\infty: \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 是范畴等价.

证明. 若 $\mathcal{C}$ 稳定, 则环路塔中每个转移函子都是等价, 因此零层取值 Ω^∞ 是等价. 反之, 若 Ω^∞ 是等价, 则定理 2.2.30 表明 $\mathcal{C}$ 与稳定范畴 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 等价, 故 $\mathcal{C}$ 稳定. □

接下来我们继续讨论谱的范畴的结构.

命题 2.2.32. 若 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, 则其稳定化 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 是可表现的.

证明. 注意到 $\mathcal{C}_* \in \mathbf{Pr}^R$, 且 Ω 作为右伴随是 $\mathbf{Pr}^R$ 中的态射. 根据命题 2.1.29 可知 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) = \varprojlim \left(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \right) \in \mathbf{Pr}^R$. □

此时 Ω 还是可达函子, 因此对某个足够大的正则基数 κ 保持 κ -滤过余极限; 这是它作为 $\mathbf{Pr}^R$ 中态射所需要的可达性.

推论 2.2.33. 对于可表现范畴 $\mathcal{C}$, 其稳定化等价于 $\mathbf{Pr}^L$ 中的余极限

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \varinjlim \left(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \cdots \right).$$

证明. 由推论 2.1.30 立即得到. □

特别地, 取 $\mathcal{C} = \mathbf{Ani}$ 时, 可知 $\mathbf{Sp}$ 是可表现范畴.

定义 2.2.34. 将 $\mathbf{Pr}^L$ 中全体可表现稳定范畴及其间正合函子所生成的子范畴记为 $\mathbf{Pr}^{\text{st}}$.

以下给出一些注记

注记 2.2.35. 若 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则 $\mathcal{C}^\kappa$ (定义 2.1.23) 也是稳定的: 只需说明 κ -紧对象关于取纤维封闭以及若 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 为纤维列, 则 $Y[-1] \rightarrow Z[-1] \rightarrow X$ 为余纤维列即可.

反过来, 若 $\mathcal{C}$ 是小稳定范畴, 则 $\text{Ind}_\kappa(\mathcal{C})$ 也是稳定的, 细节可参见 [Lurie, 2017, Proposition 1.1.3.6].

命题 2.2.36. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 是可表现且稳定的;
2. 存在可表现, 稳定范畴 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{C}$ 为其可达左正合的 Bousfield 局部化;
3. 存在小范畴 $\mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{C}$ 等价于 $\text{Fun}(\mathcal{E}, \text{Sp})$ 的可达左正合局部化.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.4.9] □

以下研究稳定化的泛性质. 环路塔的极限是一个便于计算的定义; 真正说明“稳定化”这个名字的, 是下面的泛性质: 从 $\mathcal{C}$ 到稳定可表现范畴的保余极限函子, 都会唯一地经过 $\text{Sp}(\mathcal{C})$.

命题 2.2.37. 令 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 为可表现范畴且 $\mathcal{D}$ 为稳定范畴. 则

1. $\Omega^\infty: \text{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, 具有左伴随 $\Sigma_+^\infty: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$;
2. $G: \mathcal{D} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$ 具有左伴随当且仅当 $\Omega^\infty \circ G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 具有左伴随.

注记 2.2.38. 此时将 Σ_+^∞ 称为非约化纬悬谱.

证明. 由于带点函子为遗忘函子的左伴随, 因此一切约化到带点范畴 $\mathcal{C}_*$ 上.

1. 由于 $\text{Sp}(\mathcal{C})$ 作为 $\mathcal{C}_*$ 的极限, 因此 $\Omega^\infty: \text{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}_*$ 为 Pr^R 中态射, 从而可知 Ω^∞ 存在左伴随 Σ^∞ . 从而可知结果;
2. 由稳定化构造可知 $G: \mathcal{D} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$ 无异于给出一族函子 $\Omega^{\infty-n} \circ G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_*$, 从而前者有左伴随相当于说每个 $\Omega^{\infty-n} \circ G$ 均有左伴随, 一切可以约化为 $\Omega^\infty \circ G$ 的情况.

□

由此可以得到稳定化的泛性质如下:

推论 2.2.39. (稳定化的泛性质) 令 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为可表现范畴, 且 $\mathcal{D}$ 为稳定范畴. 则前复合上稳定化函子 $\Sigma_+^\infty: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sp}(\mathcal{C})$ 诱导出范畴等价

$$\text{Fun}^L(\text{Sp}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \text{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

此外, 当 $\mathcal{C} = \text{Ani}$ 时, 有范畴等价

$$\text{Fun}^L(\text{Sp}, \mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}.$$

注记 2.2.40. 这相当于说明 Sp 是单点所生成的稳定范畴.

以下给出当 $\mathcal{C} = \text{Ani}$ 时, 非约化纬悬谱的具体刻画

构造 2.2.41. (纬悬谱) 考虑函子 $Q: \mathbf{Ani}_* \rightarrow \mathbf{Ani}_*$, 使得

$$Q(X) := \varinjlim_{n \geq 0} \Omega^n \Sigma^n X$$

由 $\Sigma \dashv \Omega$ 的单位 $X \rightarrow \Omega \Sigma X$ 可诱导出比较态射. 利用 Ω 保持滤余极限可知

$$\Omega Q(\Sigma X) = \Omega(\varinjlim_{n \geq 0} \Omega^n \Sigma^{n+1} X) \simeq \varinjlim_{n \geq 0} \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X \simeq Q(X).$$

从而可定义谱 $\Sigma^\infty X$ 使得 $\Sigma^\infty(X)_n := Q(\Sigma^n X)$, 称为 X 的纬悬谱.

不难看出前述构造关于 X 的函子性, 进而纬悬谱可构成函子

$$\Sigma^\infty[-]: \mathbf{Ani}_* \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

定义 2.2.42. (非约化纬悬谱) 令 X 为生象. 定义其非约化纬悬谱 $\mathbb{S}[X] \in \mathbf{Sp}$ 为

$$\mathbb{S}[X] := \Sigma^\infty(X_+),$$

此处 $X_+ := X \sqcup *$. 由此定义出函子

$$\mathbb{S}[-]: \mathbf{Ani} \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

当 $X = *$ 时, 定义球谱为

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}[*] = \Sigma^\infty(S^0),$$

命题 2.2.43. 非约化纬悬谱函子 $\mathbb{S}[-]$ 就是命题 2.2.37 中所述的 Σ_+^∞ .

证明. 仍然由带点化函子为左伴随约化到 $\mathbf{Ani}_*$ 的情况, 从而只需说明纬悬谱函子是 Ω^∞ 的左伴随即可. 对于带点生象 X , 有典范态射

$$u_X: X = \Omega^0 \Sigma^0 X \rightarrow QX = \Omega^\infty \Sigma^\infty X.$$

以下说明 u_X 是 $\Sigma^\infty \dashv \Omega^\infty$ 的单位, 即其给出三角等式. 换句话说, 对于全体谱 Y , 下述态射复合为同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty X, Y) \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega^\infty \Sigma^\infty X, \Omega^\infty Y) \xrightarrow{- \circ u_X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X, \Omega^\infty Y)$$

为此考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \searrow \cong & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Sigma^2 X, Y_2) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega \Sigma^2 X, Y_1) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega^2 \Sigma^2 X, Y_0) \\
 & & \searrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Sigma X, Y_1) & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(\Omega \Sigma X, Y_0) \\
 & & & & \searrow \cong & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X, Y_0)
 \end{array}$$

此处将 Y_i 视为 $\Omega^{\infty-i}(Y)$. 由于对角态射为同构, 沿对角态射的极限同构于

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}_*}(X, \Omega^\infty Y).$$

该极限可以先对列求再对行求, 沿第 k 列处的极限可以被计算为

$$\begin{aligned} \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}_*}(\Omega^n \Sigma^{n+k} X, Y_k) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}_*}(\varinjlim_n \Omega^n \Sigma^{n+k} X, Y_k) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}_*}(Q\Sigma^k X, Y_k). \end{aligned}$$

再对行计算极限得到

$$\varprojlim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ani}_*}(Q\Sigma^k X, Y_k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\Sigma^\infty X, Y).$$

□

非约化谱函子可以类比于自由函子.

此时我们可以打个表类比经典的代数和稳定同伦, 具体内容请读者见 [Lurie, 2017] 或 [Hebestreit, 2021], [Cnossen, 2025a].

代数	稳定同伦
Ab	Sp
整数环 $\mathbb{Z}$	球谱 $\mathbb{S}$
集合 S	生象 $X_0 = \Omega^\infty X$
自由生成 Abel 群 $\mathbb{Z}[S]$	非约化谱 $\mathbb{S}[X]$
交换环	$\mathbb{E}_\infty$ -环
Mod_R	$\mathcal{D}(R)$

注记 2.2.44. 对于这部分内容, 我们将统称为“高阶代数”, 注意到高阶代数与我们将在第二部分第 6.5 节介绍的“导出代数”是不同的, 后者着眼于生象化.

2.2.5 谱的展示

稳定化的泛性质告诉我们谱是什么, 但具体计算往往仍需要逐层的空间资料. 本小节的预谱只是这种具体展示: 先允许结构态射不可逆, 再用一个左伴随对其做谱化. 它不取代前面的模型无关定义. 回忆到, 对于 Abel 群 A , A 的展示就相当于说将 A 写为以下态射的余核

$$A = \mathrm{coker}(\mathbb{Z}[T] \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[S]).$$

当取 S 为 A 遗忘掉群结构后得到的集合且 T 为 $\mathbb{Z}[A]$ 遗忘掉群结构后得到的集合时, 就称为标准展示. 以下谈论在谱中的类似版本.

定义 2.2.45. (预谱) 预谱是指一族带点生象 $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 配上未必可逆的态射 $\sigma_n: X_n \rightarrow \Omega(X_{n+1})$. 预谱之间的态射 $f: X \rightarrow Y$ 是指一族带点态射 $f_n: X_n \rightarrow Y_n$, 对于每个 $n \geq 0$, 都有 Ani 中的交换图表

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \sigma_n^X \downarrow & & \downarrow \sigma_n^Y \\ \Omega(X_{n+1}) & \xrightarrow{\Omega(f_{n+1})} & \Omega(Y_{n+1}). \end{array}$$

将预谱所构成的范畴记作 $\mathbf{PSp}$.

我们的想法是将预谱视为谱的展示. 注意到每个谱都自动是一个预谱. 反过来, 我们可以通过以下方式将预谱转为谱:

构造 2.2.46. 给定预谱 X , 对应其对应谱 X^{sp} 为 $\mathbf{Sp}$ 中的余极限

$$X^{\text{sp}} := \varinjlim (\Sigma^\infty X_0 \rightarrow (\Sigma^\infty X_1)[-1] \rightarrow (\Sigma^\infty X_2)[-2] \rightarrow \cdots),$$

记 $\varepsilon: \Sigma\Omega \rightarrow \text{id}$ 为 $\Sigma \dashv \Omega$ 的余单位, 则对应谱中的比较态射可由以下方式逐阶给出:

$$\begin{aligned} (\Sigma^\infty X_n)[-n]_k &= (\Sigma^\infty X_n)_{k-n} = Q\Sigma^{k-n}X_n \\ &\xrightarrow{\sigma_n} Q\Sigma^{k-n}\Omega X_{n+1} \xrightarrow{\varepsilon} Q\Sigma^{k-(n+1)}X_{n+1} \\ &= (\Sigma^\infty X_{n+1})[-(n+1)]_k. \end{aligned}$$

注记 2.2.47. 上述构造给出函子 $(-)^{\text{sp}}: \mathbf{PSp} \rightarrow \mathbf{Sp}$, 它是遗忘函子 $U: \mathbf{Sp} \hookrightarrow \mathbf{PSp}$ 的左伴随.

命题 2.2.48. (标准展示) 每个谱 X 都自然同构于 $(UX)^{\text{sp}}$.

证明. 固定谱 $Y \in \mathbf{Sp}$, 有

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}((UX)^{\text{sp}}, Y) &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}((\Sigma^\infty X_n)[-n], Y) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty X_n, Y[n]) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, \Omega^\infty(Y[n])) \\ &\simeq \varprojlim_n \text{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, Y_n) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Sp}}(X, Y). \end{aligned}$$

□

因此, 可使用这种方式表述 $\mathbf{Sp}$ 中的余极限.

推论 2.2.49. 给定图表 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Sp}$, 则

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i) \simeq \left(\left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_n \right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \right)^{\text{sp}},$$

此处预谱的结构态射由以下态射给出:

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_n \xrightarrow{\varinjlim_i (\sigma_n)} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \Omega F(i)_{n+1} \rightarrow \Omega(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)_{n+1}).$$

2.2.6 t-结构

稳定范畴把纬悬变成了可逆的平移, 但它本身不会告诉我们哪些对象应当位于“非负次”. t -结构正是一个额外的次数分割: 它给出截断函子、Postnikov 塔以及一个 Abel 心. 本节先定义截断与完备性, 再以 $\mathbf{Sp}$ 的 Postnikov t -结构为主要例子. 关于 t -结构, 最原始的文献是 [Deligne et al., 1983].

定义 2.2.50. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴. $\mathcal{C}$ 的 **t -结构** 是指二元组 $(\mathcal{C}_{\leq 0}, \mathcal{C}_{\geq 0})$, 满足:

1. $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 和 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 均为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴, 且关于同构封闭, 即只要包含某个对象, 就会包含所有与之同构的对象;
2. 对 $n \in \mathbb{Z}$, 记 $\mathcal{C}_{\geq n} := \mathcal{C}_{\geq 0}[n]$ 以及 $\mathcal{C}_{\leq n} := \mathcal{C}_{\leq 0}[n]$. 则 $\mathcal{C}_{\geq 1} \subseteq \mathcal{C}_{\geq 0}$, $\mathcal{C}_{\leq 0} \subseteq \mathcal{C}_{\leq 1}$;
3. 对 $X \in \mathcal{C}_{\geq 1}$, $Y \in \mathcal{C}_{\leq 0}$, 映射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 可缩, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq *$;
4. 对于 $X \in \mathcal{C}$, 存在纤维列 $X' \rightarrow X \rightarrow X''$ 使得 $X' \in \mathcal{C}_{\geq 1}$ 且 $X'' \in \mathcal{C}_{\leq 0}$.

定义-命题 2.2.51. 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\leq n}$ 都是 $\mathcal{C}$ 的左 Bousfield 局部化, 将局部化函子记为 $\tau_{\leq n}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\leq n}$. 对偶地, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq n}$ 都是 $\mathcal{C}$ 的右 Bousfield 局部化, 将局部化函子记为 $\tau_{\geq n}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\geq n}$.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.5]. □

推论 2.2.52. 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\leq n} \subseteq \mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{C}$ 的极限封闭. 对偶地, 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq n} \subseteq \mathcal{C}$ 关于 $\mathcal{C}$ 中的余极限封闭.

注记 2.2.53. 对于 $m, n \in \mathbb{Z}$, 不难发现函子 $\tau_{\leq n}$ 和 $\tau_{\geq n}$ 限制到 $\mathcal{C}_{\leq m}$ 上总是一个自己到自己的函子 (不一定为等价).

令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 且令 $m, n \in \mathbb{Z}$. 前述注记表明具有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\geq n} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow \tau_{\leq m} & & \downarrow \tau_{\leq m} \\ \mathcal{C}_{\geq n} \cap \mathcal{C}_{\leq m} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\leq m} \end{array}$$

不难发现根据定义 2.1.7 可知存在左 Beck–Chevalley 变换

$$\gamma: \tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n} \rightarrow \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$$

以下说明其为同构, 即上述图表是左可伴随的.

命题 2.2.54. 令 $\mathcal{C}$ 为带有 t -结构的稳定范畴, 则 Beck–Chevalley 变换 $\gamma: \tau_{\leq m} \circ \tau_{\geq n} \rightarrow \tau_{\geq n} \circ \tau_{\leq m}$ 是同构.

证明. 一切可以约化到同伦范畴之上, 因此转变为经典的三角范畴结果. $\square$

现在可以考虑 $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$, 我们将这一结构称为 t -结构的心.

定义-命题 2.2.55. 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$ 是某个 Abel 范畴的脉. 称其为 t -结构的心, 记作 $\mathcal{C}^\heartsuit$.

证明. 为此只需观察到 $\pi_n \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^{-n}(X, Y)$, 当 $X, Y \in \mathcal{C}^\heartsuit$ 时, $\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}}^{-n}(X, Y) = \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X[n], Y)$ 在 $n > 0$ 时消失, 因此 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 确为 $(1, 1)$ -范畴, 并且为 $h\mathcal{C}$ 配上 t -结构所得到的心, 由三角范畴的经典论证可知 $h\mathcal{C}^\heartsuit$ 为 Abel 范畴. $\square$

我们可以由 t -结构恢复出稳定同伦概念¹.

定义-命题 2.2.56. 对 $X \in \mathcal{C}$, 记 $\pi_n(X) := (\tau_{\geq n} \tau_{\leq n} X)[-n] \in \mathcal{C}^\heartsuit$, 称为 X 关于该 t -结构的稳定同伦, 则对纤维列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 有 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 中的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Z) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

证明. 由 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 可延伸出长正合列 $\cdots \rightarrow Z[-1] \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \rightarrow Y[1] \rightarrow \cdots$ 立刻得到. $\square$

以下命题刻画说明如何经由局部化刻画 t -结构

命题 2.2.57. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为局部化函子且 S 为 $\mathcal{C}$ 中一族使得 $f \in S$ 都有 $L(f)$ 为等价的态射. 则以下条件等价:

1. 存在一族态射 $\{0 \rightarrow X: L(X) \simeq 0\}$ 生成 S ;
2. $L(\mathcal{C})$ 关于扩张封闭, 即考虑 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 则若 X 和 Z 在 $L(\mathcal{C})$ 中, 则 Y 也在;
3. 对于任意 $A \in \mathcal{C}$ 和 $B \in L(\mathcal{C})$ 有 $\operatorname{Ext}^1(LA, B) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1(A, B)$ 为单射;
4. 全子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} = \{A: LA \simeq 0\}$ 和 $\mathcal{C}_{\leq -1} = \{A: LA \simeq A\}$ 确定了 $\mathcal{C}$ 上的 t -结构.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.16] $\square$

如三角范畴一般, 可以探讨 t -结构的有界性以及完备性.

定义 2.2.58. 称稳定范畴 $\mathcal{C}$ 的 t -结构 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ 为:

- 左有界的, 是指 $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n}$;
- 右有界的, 是指 $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\geq n}$;

¹事实上, 如果关心同调代数, 此时应该称为同调, 如果使用上同调约定, 此时应该称为上同调.

- 有界的, 是指 $\mathcal{C}$ 既是左有界的又是右有界的;
- 左分离的, 是指 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n} = 0$;
- 右分离的, 是指 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\geq n} = 0$;

我们还可以考虑 $\mathbf{Cat}$ 中的极限

$$\widehat{\mathcal{C}} := \varprojlim_{n \in \mathbb{Z}} \left(\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 2} \xrightarrow{\tau_{\leq 1}} \mathcal{C}_{\leq 1} \xrightarrow{\tau_{\leq 0}} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq -1}} \cdots \right).$$

使用 $\mathbf{Cat}$ 中极限的具体刻画可知, 其为 $\mathbf{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{C})$ 中的以下函子 $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}$ 所张成的全子范畴:

- 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $F(n) \in \mathcal{C}_{\leq -n}$;
- 对于 $m \leq n \in \mathbb{Z}$, 都有 $F(m) \rightarrow F(n)$ 诱导出等价 $\tau_{\leq -n} F(m) \rightarrow F(n)$.

定义 2.2.59. 令 $\mathcal{C}$ 为稳定范畴, 则上述定义的 $\widehat{\mathcal{C}}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的左完备化. 称稳定范畴 $\mathcal{C}$ 是左完备的是指 $\mathcal{C} \simeq \widehat{\mathcal{C}}$. 类似地定义右完备.

命题 2.2.60. 令 $\mathcal{C}$ 为配有 t -结构的稳定范畴, 则:

1. $\widehat{\mathcal{C}}$ 是稳定范畴;
2. 令 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$ 和 $\widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 分别为穿过 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 和 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 的函子所张成的全子范畴, 则 $(\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}, \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0})$ 定义了 $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的 t -结构;
3. 存在典范正合函子 $\theta: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 其诱导范畴等价 $\mathcal{C}_{\leq 0} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$.

记 2.2.61. 不难发现 $\mathcal{C}^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\leq n} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 会诱导出范畴等价 $\widehat{\mathcal{C}}^+ \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}$, 并且函子 $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 会诱导出范畴等价 $\mathcal{C}^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^+$ (注意此时加号位置). 因此左有界稳定范畴的完备化理论与左完备稳定范畴的理论是等价的.

证明.

1. 注意到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 可写为极限

$$\widehat{\mathcal{C}} = \varprojlim \left(\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq 0} \Sigma} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq 0} \Sigma} \mathcal{C}_{\leq 0} \right).$$

因此这相当于说 $\widehat{\mathcal{C}}^{\text{op}} \simeq \mathbf{Sp}(\mathcal{C}_{\geq 0})$, 从而稳定;

2. 观察到, $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的平移函子应当定义为

$$(F[n])(m) = F(n+m)[n].$$

从而 $\widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}[1] \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 且 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}[-1] \subseteq \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$. 此外, 若 $X \in \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$ 且 $Y \in \widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}[-1]$, 则根据极限的态射生象计算可知 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, Y)$ 可以被计算为

$$\varprojlim (\cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X(n), Y(n)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X(n-1), Y(n-1)) \rightarrow \cdots)$$

而由 $\mathcal{C}$ 上的 t -结构知道每一项均可缩, 因此 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, Y) \simeq 0$. 最后取 $X \in \widehat{\mathcal{C}}$, $X'' = \tau_{\leq -1} \circ X$, 令 $u: X \rightarrow X''$ 为诱导的态射, 则 $\mathrm{fib}(u) \in \widehat{\mathcal{C}}_{\geq 0}$;

3. 现考虑 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C}$ 中由使得 $C \in \mathcal{C}_{\leq -n}$ 的 (n, C) 所张成的全子范畴, 不难看出 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathcal{C}$ 是 Bousfield 局部化, 记其左伴随为 L . 而 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}))$ 可经由伴随变为 $\mathrm{Fun}(\mathbb{Z} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$, 因此我们所求的典范函子 $\theta: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 可以转化为函子 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 而这事实上是 $\mathbb{Z} \times \mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (注意到 $\mathcal{D}$ 其实标识了 $\widehat{\mathcal{C}}$). 接下来说明 θ 是正合函子, 由稳定性可知只需证明右正合, 而截断函子 $\tau_{\leq n}: \mathcal{C}_{\leq n+1} \rightarrow \mathcal{C}_{\leq n}$ 保持极限, 并且 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中有限余极限是逐点计算的, 因此一切又约化为说明

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\theta} \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \tau_{\leq n} \mathcal{C}$$

的正合性, 但这一复合无非是 $\tau_{\leq n}$. 最后说明其诱导范畴等价, 观察到 $\widehat{\mathcal{C}}_{\leq 0}$ 实际上可以写为以下极限

$$\varprojlim (\cdots \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{C}_{\leq 0} \xrightarrow{\tau_{\leq -1}} \mathcal{C}_{\leq -1} \rightarrow \cdots)$$

从而可知这确实就是 $\mathcal{C}_{\leq 0}$.

□

命题 2.2.62. 令 $\mathcal{C}$ 是配有 t -结构的稳定范畴, 且 $\mathcal{C}$ 具有可数余积, 且 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 关于可数余积是封闭的. 则以下条件等价:

1. $\mathcal{C}$ 左完备;
2. $\mathcal{C}$ 左分离.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.2.1.19]

□

以下探讨 t -结构与可表现范畴间的关系, 在可表现稳定范畴中, t -结构可以由一边所直接给出.

定义 2.2.63. 令 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, 称 t -结构 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ 可达的是指子范畴 $\mathcal{C}_{\geq 0} \subseteq \mathcal{C}$ 可表现.

命题 2.2.64. 令 $\mathcal{C}$ 为可表现稳定范畴. 则

1. 若 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 为关于余极限和扩张封闭的可表现子范畴, 则存在 $\mathcal{C}$ 上唯一的 t -结构使得 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\geq 0}$;
2. 令 $\{X_{\alpha}\}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一族对象, 且 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathcal{C}$ 中包含 X_{α} 且在扩张和余极限下封闭的最小全子范畴. 则 $\mathcal{C}'$ 是可表现的.

注记 2.2.65. 该命题相当于在说可表现稳定范畴 $\mathcal{C}$ 中任意一族对象均可生成可达的 t -结构.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.4.11] $\square$

以下观察 Sp 的 t -结构, 由于 Sp 是可表现稳定范畴, 因此我们可以用上述命题来生成 Sp 上的 t -结构, 不过我们事实上可以对于一般的可表现范畴 $\mathcal{C}$ 考虑 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构.

命题 2.2.66. 令 $\mathcal{C}$ 为可表现范畴, $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 为由使得 $\Omega^\infty X$ 为 $\mathcal{C}$ 的终对象的 X 所张成的全子范畴, 则 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 确定了 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构.

证明. 根据命题 2.1.26 可知 $X \in \mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 落在 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 中当且仅当

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_\alpha, \Omega^\infty X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{C})}(\Sigma^\infty C_\alpha, X)$$

对于所有的 $C_\alpha \in \mathcal{C}^\kappa$ 是可缩的 (因为 $\Omega^\infty X$ 为终对象, 而 $\mathcal{C}$ 中所有对象都可写 C_α 的余极限). 从而考虑包含 $\Sigma^\infty(\mathcal{C}^\kappa)$ 并且在扩张和余极限下封闭的范畴 $\mathrm{Sp}_{\geq 0}(\mathcal{C})$, 根据命题 2.2.64 即知 $\mathrm{Sp}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ 确定了 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 上的 t -结构, 而前文相当于在说我们所定义的 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$ 就是这个 t -结构所对应的 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})_{\leq -1}$. $\square$

现在令 $\mathcal{C} = \mathrm{Ani}$, 我们得到 Sp 上的 t -结构, 它会具有一些性质

命题 2.2.67. Sp 上的 t -结构是左完备且右完备的, 且其心 $\mathrm{Sp}^\heartsuit$ 典范等价于 Ab . 这种 t -结构也被称为 *Postnikov t -结构*.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.4.3.6], 实际上前者是直接的验证, 而后者来自于以下一则事实: $X \in \mathrm{Sp}^\heartsuit$ 当且仅当 $X(n)$ 为 Ani 中的 n 阶 Eilenberg–MacLane 对象, 因此 $\mathrm{Sp}^\heartsuit$ 可以计算为 Cat 中的极限

$$\varprojlim \left(\cdots \xrightarrow{\Omega} \mathrm{EM}_1(\mathrm{Ani}) \xrightarrow{\Omega} \mathrm{EM}_0(\mathrm{Ani}) \right),$$

此处 $\mathrm{EM}_n(\mathrm{Ani})$ 是 Ani 中的 n 阶 Eilenberg–MacLane 对象所构成的全子范畴, 而 [Lurie, 2009b, Proposition 7.2.2.12] 说明 Sp 会等价于 $\mathrm{CGrp}(\mathrm{Disc}(\mathrm{Ani}))$, 即为 Ab (注意到 $\mathrm{Disc}(\mathrm{Ani}) = \mathrm{Set}$). $\square$

注记 2.2.68. 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, $X \mapsto \pi_n X$ 都会给出稳定同伦群 $\pi_n: \mathrm{Sp} \rightarrow \mathrm{Ab}$. 当 $n \geq 0$ 时, π_n 可由底层无穷环路空间计算为

$$\mathrm{Sp} \xrightarrow{\Omega^\infty} \mathrm{Ani}_* \xrightarrow{\pi_n} \mathrm{Ab}.$$

此处第二个函子为同伦群函子, 其 Abel 群结构来自 $\Omega^\infty X$ 的无穷环路结构; 负次则通过平移定义. 由于 Sp 的 Postnikov t -结构左、右完备, 谱间态射 $X \rightarrow Y$ 为等价当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, $\pi_n X \rightarrow \pi_n Y$ 都是同构.

由此可以具体将谱的同伦群计算出来: 对于谱 X 以及 $k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\pi_k(X) := [\mathbb{S}[k], X] = \pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathbb{S}[k], X).$$

§ 2.3 谱的张量积

本节只记录谱的张量积在计算中所需的结论与公式. Lurie 张量积的正式构造、 $\mathbf{Sp}$ 作为 $\mathbf{Pr}^L$ 中幂等交换代数的证明, 以及由此得到的谱张量积, 分别见定义 5.8.3、命题 5.8.11 与 § 5.8.3.

2.3.1 计算公式、映射谱与广义同调

谱的张量积 $- \otimes -$ 是 $\mathbf{Sp}$ 上以球谱为幺元的对称幺半结构, 并且关于每个变量都保持小余极限. 下面借助谱的层次展示记录它的具体计算公式. 由于每个谱均可通过命题 2.2.48 表现为纬悬谱的余极限, 根据 [Hebestreit, 2021, Proposition II.51] 可知纬悬谱函子是对称幺半函子, 因而只需对于纬悬谱构造张量积即可. 那么研究纬悬谱的张量积就需要研究 $\mathbf{Ani}_*$ 上的对称幺半结构.

$\mathbf{Ani}_*$ 上的对称幺半结构被称为缩积, 给定生象 X 和 Y , 定义 X 与 Y 的缩积 $X \wedge Y$ 为推出

$$\begin{array}{ccc} X \vee Y & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \wedge Y. \end{array}$$

从而可在这一逐层展示中具体计算谱的张量积:

命题 2.3.1. 令 $X, Y \in \mathbf{Sp}$ 为谱, 则有自然等价

$$X \otimes Y := \varinjlim_n \varprojlim_m (\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m)[-(n+m)]).$$

注记 2.3.2. 不难发现其幺元为球谱 $\mathbb{S}$.

接下来介绍映射谱的概念以说明谱的张量积是闭对称幺半的.

构造 2.3.3. 令 Y 和 Z 为谱, 对应映射谱 $\mathrm{map}(Y, Z) \in \mathbf{Sp}$ 为

$$\mathrm{map}(Y, Z)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n]) \simeq \varprojlim_k \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(Y_k, Z_{k+n}),$$

此处结构态射由以下公式给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, \Omega(Z[n+1])) \simeq \Omega \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(Y, Z[n+1]).$$

这定义出函子

$$\mathrm{map}: \mathbf{Sp}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Sp}.$$

接下来说明 $\mathbf{Sp}$ 是闭对称幺半的.

命题 2.3.4. 对于任意谱 Y , 函子 $\mathrm{map}(Y, -)$ 均为 $- \otimes Y$ 的右伴随.

证明. 直接进行计算得到

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(X \otimes Y, Z) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\varinjlim_n \varinjlim_m (\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m)[-(n+m)]), Z) \\
 &\simeq \varprojlim_{n,m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\Sigma^\infty(X_n \wedge Y_m), Z[n+m]) \\
 &\simeq \varprojlim_{n,m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n \wedge Y_m, Z_{n+m}) \\
 &\simeq \varprojlim_{n,m} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, \mathrm{Hom}(Y_m, Z_{n+m})) \\
 &\simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ani}_*}(X_n, \mathrm{map}(Y, Z)_n) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(X, \mathrm{map}(Y, Z)).
 \end{aligned}$$

□

对于映射谱, 其上的同伦群就是构造 1.3.4 所建立的上同调理论:

定义 2.3.5. 令 E 为谱, X 为生象, 定义 X 的 E -同调群为

$$E_*(X) := \pi_*(\mathbb{S}[X] \otimes E).$$

对偶地, 定义 X 的 E -上同调群为

$$E^*(X) := \pi_{-*} \mathrm{map}(\mathbb{S}[X], E).$$

第 3 章

同调代数

§ 3.1 同调代数

本章的目标是把经典同调代数里被同伦 1-范畴压平的高阶信息找回来. 我们先用 Dold–Kan 对应和 dg-范畴说明链复形如何编码同伦, 再把导出范畴定义为关于拟同构的局部化. 本章最后安排了一节选读材料, 从谱值球状预层与层的角度重新刻画一类 Grothendieck Abel 1-范畴的无界导出范畴.

我们假定读者已经熟悉经典导出范畴的基本构造; 若需要回顾, 可参考 [Zheng, 2024] 和 [李文威, 2024].

考虑环化空间 X , 记 $\mathrm{QCoh}(X)$ 为 X 上拟凝聚层所构成的范畴.

我们知道在 fpqc 景 $\mathcal{C}$ 中, 赋值

$$X \mapsto \mathrm{QCoh}(X)$$

关于 $\mathcal{C}$ 中的覆盖满足下降. 若只保留同构群胚, 可以把它看成一个 $(2, 1)$ -层; 在本讲义的默认语言中, 更自然的说法是它取值于范畴并满足 Čech 下降.

具体而言, 考虑 $\mathcal{C}$ 中的开覆盖 $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$, 有如下的正合列

$$\mathrm{QCoh}(U) \longrightarrow \prod_i \mathrm{QCoh}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{QCoh}(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \prod_{i,j,k} \mathrm{QCoh}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

这里并非普通的“正合列”, 而是一个余单纯图表的开头; 下降断言是 $\mathrm{QCoh}(U)$ 到整个图表的极限为范畴等价. 此处 $U_i \cap U_j$ 指拉回 $U_i \times_U U_j$.

现在先考虑 $\mathrm{QCoh}(X)$ 的经典导出 1-范畴 $D(X)$. 问题不在于“导出”本身, 而在于取同伦 1-范畴时丢掉了高阶粘合资料; 下面的例子正好显示这种信息损失. 让我们回到概形. 令 $\mathbb{P}^1$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的射影直线. 作为概形, 可以将 $\mathbb{P}^1$ 视为两个仿射直线 $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ 反着粘起来, 因此可以写为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[X, X^{-1}] & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[U] & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

我们知道若 $D(X)$ 可以下降, 则

$$\begin{array}{ccc} D(\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & D(\mathbb{Z}[T]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathbb{Z}[U]) & \longrightarrow & D(\mathbb{Z}[X, X^{-1}]) \end{array}$$

应当为一个伪拉回图表: 也就是说, 锥上两条复合只要求配有指定的自然同构, 而不是严格相等. 但很可惜, 它仍然不是. 因为事实上存在非零态射 $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(-2)[1]$ 使得其在 $D(\mathbb{Z}[U]) \times_{D(\mathbb{Z}[X, X^{-1}])} D(\mathbb{Z}[T])$ 中为 0. 因此其无法满足下降条件, $\mathbb{P}^1$ 上拟凝聚层的导出范畴信息无法由其仿射区域所确定.

那么问题会出在哪里呢? 出在我们对于导出范畴的构造上.

我们知道在构造导出范畴的过程中, 我们原本的打算是逆掉全体拟同构, 但是在经典 1-范畴论中, 逆掉弱等价通常只能将其刻画为某种商.

具体的构造过程请参考任意一本前文提到的同调代数教材, 这并不是我们的主题, 现在我们直接给出最终得到的东西.

令 $\mathcal{A}$ 为具有足够投射对象的 Abel 1-范畴, 且 $D^-(\mathcal{A})$ 为其上有界经典导出 1-范畴. 换句话说我们可以将其中对象描述为这样的链复形

$$P_* = (\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0), \quad P_i \text{ 均为投射对象.}$$

由于我们将导出范畴刻画为商, 因此其中态射实际上为 $\text{Hom}_{\text{Ch}_*(\mathcal{A})}(P_*, Q_*)$ 中的同伦类. 这就是问题所在, 由于我们将态射直接设置为同伦类, 因此无法记录两个态射之间是如何同伦的, 换句话说, 原本我们有这样一个图表

$$\begin{array}{ccc} P_* & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Q_* \end{array}$$

其中 2-箭头 $f \Rightarrow g$ 表示从 f 到 g 的同伦, 此外还有 3-箭头, 4-箭头... 但是在经典的导出范畴中, 我们只剩下

$$P_* \xrightarrow{[f]=[g]} Q_*$$

此处 $[f]$ 和 $[g]$ 表示同伦类. 这样零伦的态射就自动被视为 0 了. 不妨将本节视为稳定范畴的一个重要例子.

3.1.1 Dold-Kan 对应

本节旨在讲述如何将同伦线性化, 以得到同调的信息, 并且如何将同调的信息对应回同伦上的信息. 这种对应称为 Dold-Kan 对应.

将同伦信息线性化的过程称作 **Dold-Kan 对应**.

注记 3.1.1. 本小节中若无特殊说明, 所论范畴均为 1-范畴.

首先, 我们讲述如何从单纯集得到一个链复形, 令 $S \in \mathbf{sSet}$ 为单纯集, 考虑自由 Abel 群函子所诱导的函子 $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sAb}$, 有 $\mathbb{Z}(S)_n = \mathbb{Z}(S_n)$ 为 S_n 所生成的自由 Abel 群. 不难发现, 当 $S = \text{Sing}(E)$, $E \in \mathbf{Top}$ 为拓扑空间时, $\mathbb{Z}(S)_n$ 即为奇异同调论中的奇异链群, 因此我们可以仿照奇异同调论中的思想, 将单纯集编码为链复形.

定义 3.1.2. (Moore 链复形) 令 S 为单纯 Abel 群, 对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义

$$\partial := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i: S_n \rightarrow S_{n-1};$$

这使得 $(S_n)_{n \geq 0}$ 连同 ∂_* 构成链复形 $S_* \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$, 称为 **Moore 链复形** 或非正规化链复形, 记为 $C_*(S)$.

注意到此时我们并没有用到任何与退化态射相关的信息, 因此上述定义完全可以搬至半单纯 Abel 群中.

不过此时我们仍然可以考虑其上全体退化单形所张成的子链.

构造 3.1.3. 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, $D_n(S)$ 为 S_n 中全体退化单形所构成的子群, 即 $D_n(S) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{im}(s_{n-1}^i) \subseteq S_n$. 不难说明其构成的链复形 $D_*(S)$ 是 $C_*(S)$ 的子链复形.

以最精简的保留有效信息为原则, $D_*(S)$ 的信息是应当被商掉的, 这一过程称为**正规化**.

构造 3.1.4. 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, S_* 为其对应的 Moore 链复形, 定义 $N_*(S) := C_*(S)/D_*(S)$, 称为**正规化链复形**.

事实上, 上述构造也可以写为 S_* 的子链复形的形式.

定义 3.1.5. 令 $S \in \mathbf{sAb}$ 为单纯 Abel 群, 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $0 \leq k \leq n$ 定义

$$N_n(S) := \bigcap_{i=1}^n \ker(S_n \xrightarrow{d_i} S_{n-1}), n \geq 1$$

当 $n = 0$ 时定义为 S_0 . 这连同 $d_0: S_n \rightarrow S_{n-1}$ 在 $N_n(S)$ 上的限制给出链复形 $N_*(S)$, 称为**正规化链复形**.

事实 3.1.6. 两种方式定义的正规化链复形是同构的. 这一事实际上可以在 Dold-Kan 对应的具体证明中看出.

不难发现当我们取 $S = \mathbb{Z}(\Delta^n)$ 时, 上述构造给出函子

$$\begin{array}{ccc} \Delta & & \\ \downarrow y & \searrow [n] \mapsto N_*(\mathbb{Z}\Delta^n) & \\ \mathbf{sAb} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}). \end{array}$$

我们可以利用实现-脉伴随定义其右伴随为 $\text{DK}(C_*) := [n] \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Ch}_*(\mathbf{Ab})}(N_*(\mathbb{Z}\Delta^n), C_*)$, 称为 Dold-Kan 对象. 具体刻画其定义:

定义 3.1.7. 取定 $\text{Ch}_{\geq 0}(\text{Ab})$ 中的对象 C_* , 依照以下方式定义单纯 Abel 群 $\text{DK}(C_*) \in \text{sAb}$:

- 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 定义 $\text{DK}_n(C_*) := \bigoplus_{\alpha: [n] \rightarrow [k]} C_k$, 此处 α 取遍 $[n]$ 到 $[k]$ 的全体满射;
- Δ 中的态射 $\beta: [n'] \rightarrow [n]$ 给出的态射 $\text{DK}_n(C_*) \rightarrow \text{DK}_{n'}(C_*)$ 在 $\alpha: [n] \twoheadrightarrow [k]$ 和 $\alpha': [n'] \twoheadrightarrow [k']$ 对应的直和分量定义如下:
 - 若 $k' = k$, 且有交换图表

$$\begin{array}{ccc} [n'] & \xrightarrow{\beta} & [n] \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ [k'] & \xrightarrow{\text{id}} & [k] \end{array}$$

则 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 是恒等态射 id_{C_k} ;

- 若 $k' = k - 1$, 且有交换图表

$$\begin{array}{ccc} [n'] & \xrightarrow{\beta} & [n] \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ [k'] & \xrightarrow{+1} & [k] \end{array}$$

则 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 为边缘态射 $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$;

- 其它情况下 $C_k \rightarrow C_{k'}$ 为零.

$\text{DK}(C_*)$ 称为链复形 C_* 的 **Dold–Kan 对象**, 函子 $\text{DK}: \text{Ch}_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ab}) = \text{sAb}$ 被称为 **Dold–Kan 对应**.

注记 3.1.8. 一种更自然的视角是这样看: 给定链复形 C_* , 将其上所有面态射拆出可以得到半单纯对象 $C_{\text{单}}$

$$\cdots \rightrightarrows C_2 \rightrightarrows C_1 \rightrightarrows C_0$$

而 $\text{DK}(C_*)$ 相当于左 Kan 延拓

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{单}} & & \\ \downarrow & \searrow (C)_{\text{单}} & \\ \Delta & \xrightarrow{\text{Lan}_i(C)_{\text{单}}} & \text{Ab} \end{array}$$

注记 3.1.9. 不难发现, 取 G 为交换群, $n \geq 0$ 为非负整数, 且令 $G[n]$ 为在 n 处为 G , 在其它地方为 0 的链复形, 不难发现 $\text{DK}(G[n]) = K(G, n)$ 为定义 1.2.1 所给出的 Eilenberg–MacLane 空间, 因此在 [Lurie, 2018a, Tag 00QT] 以及部分其它文献中喜欢将 DK 称为 Eilenberg–MacLane 函子, 不过我们在后文中将更加深入的讨论这一点.

引理 3.1.10. 伴随对 $N_* \dashv \text{DK}_\bullet$ 构成范畴等价.

证明. [Lurie, 2017, Lemma 1.2.3.13]. □

上述所有内容都可以直接推广到加性 1-范畴 $\mathcal{A}$ 的情况, 只需将单纯 Abel 群改为 $\mathcal{A}$ 中的单纯对象即可. 特别地, Dold–Kan 对应此时变为.

定理 3.1.11. (Dold–Kan 对应) 令 $\mathcal{A}$ 为加性 1-范畴. 则函子

$$\mathrm{DK}_\bullet : \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}) = \mathrm{s}\mathcal{A}$$

全忠实, 特别地, 当 $\mathcal{A}$ 幂等完备时, 其为范畴等价.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.2.3.7]. □

模型与具体呈现 (可跳读) 最后给出一种适合具体计算的模型呈现:

命题 3.1.12. 在 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ 上具有以下投射模型结构:

1. 弱等价定义为拟同构;
2. 纤维化定义为链复形之间在每个正次数上的逐度满射; 在 0 次不要求满射.

且 Dold–Kan 对应给出 Quillen 等价 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})_{\mathrm{proj}} \simeq_{\mathrm{Quillen}} \mathrm{sAb}_{\mathrm{Quillen}}$. 此处 $\mathrm{sAb}_{\mathrm{Quillen}}$ 表示 sAb 上带有 sSet 限制而来的 Quillen 模型结构.

注记 3.1.13. 事实上, 上述结果可以被推广到幂等完备的加性 1-范畴 $\mathcal{A}$ 上. 此时得到的是单纯范畴间的弱等价; 取同伦脉后便给出相应范畴间的等价, 证明见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.23].

3.1.2 微分分次范畴

注记 3.1.14. 本小节中若无特殊说明, 所论范畴均为 1-范畴.

而后我们来介绍微分分次范畴, 这是一种描述链复形范畴的高阶信息的方式.

定义 3.1.15. 令 k 为交换环, k 上的微分分次范畴 $\mathcal{C}$ 由以下信息组成:

- 集合 $\{X, Y, \dots\}$, 称为 $\mathcal{C}$ 中的对象;
- 对于任意的 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有链复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_*$

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_1 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_{-1} \rightarrow \cdots$$

- 对于任意三元组 (X, Y, Z) , 复合态射定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_* \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)_*;$$

- 对于每个 $X \in \mathcal{C}$, 都有恒等态射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)_0$ 使得

$$g \circ \mathrm{id}_X = g, \quad \mathrm{id}_X \circ f = f.$$

使得对于任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)_p$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_q$ 以及 $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_r$ 都有

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

当 $k = \mathbb{Z}$ 时, 称 k 上的微分分次范畴为微分分次范畴, 简称 dg-范畴.

例 3.1.16. 令 $\mathcal{A}$ 为加性 1-范畴, 则 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 自动构成微分分次范畴.

构造 3.1.17. 对于 k 上的微分分次范畴 $\mathcal{C}$, 我们可以通过以下方式将其编译为范畴. 考虑复合函子

$$\text{Ch}_*(k) \xrightarrow{\tau_{\geq 0}} \text{Ch}_{\geq 0}(k) \xrightarrow{\text{DK}} \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Mod}_k) \rightarrow \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set})$$

Alexander–Whitney 构造说明该函子是右松幺半函子. 它可以将 k 上的微分分次范畴编码为单纯范畴 $\mathcal{C}_{\Delta}$:

- 其对象为 $\mathcal{C}$ 中的对象;
- 对于 $X, Y \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\Delta}}(X, Y)_{\bullet} := \text{DK}_{\bullet}(\tau_{\geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_{*})$.

称 $\mathcal{C}_{\Delta}$ 为 $\mathcal{C}$ 的底单纯范畴.

定义 3.1.18. 令 $\mathcal{C}$ 为 k 上的微分分次范畴, 则 $\mathcal{C}$ 的微分分次脉定义为其底单纯范畴的同伦脉, 即 $N^{\text{hc}}(\mathcal{C}_{\Delta})$.

注记 3.1.19. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.1.17] 表明上述定义与其书内的微分分次脉定义等价. 微分分次脉保留了映射复形的同伦信息, 但任意 dg-范畴的脉并不自动稳定; 定理 3.1.23 要在进一步作 Morita 局部化以后成立.

命题 3.1.20. 令 $\mathcal{A}$ 为加性 1-范畴, HE_{ch} 表示其链同伦等价所构成的子集, 则

$$N^{dg}(\text{Ch}_*(\mathcal{A})) \simeq N(\text{Ch}_*(\mathcal{A}))[HE_{ch}^{-1}]$$

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.4.5]. □

以下一则结果写给具有相关知识储备的读者, 算是本节的题外话:

定义 3.1.21. 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为 k 上的微分分次范畴, 则从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的微分分次函子 F 由以下信息组成:

- 对于任意对象 $X \in \mathcal{C}$, 都有 $F(X) \in \mathcal{D}$;
- 对于任意两个对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有链复形之间的态射

$$\alpha_{X, Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_{*} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y))_{*}.$$

上述信息需要满足以下相容性:

- 对于任意 $X \in \mathcal{C}$, 都有 $\alpha_{X,X}(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$;
- 对于任意三元组 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_p$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)_q$ 都有

$$\alpha_{X,Z}(g \circ f) = \alpha_{Y,Z}(g) \circ \alpha_{X,Y}(f).$$

因此可定义 k 上全体微分分次范畴所构成的 1-范畴, 记为 dgCat_k .

模型与具体呈现 (可跳读) 下面的模型结构给出 dg-范畴所组成范畴的一种具体呈现.

命题 3.1.22. 令 k 为交换环. 则 dgCat_k 上存在组合的模型结构, *Dwyer-Kan* 地定义如下:

弱等价. 微分分次函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 被称为是弱等价, 是指 F 诱导出 $h\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{D}$ 上的范畴等价, 并且对于全体 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))_*$ 为拟同构;

纤维化. 微分分次函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 被称为是纤维化是指其满足以下条件:

- F 诱导同伦范畴上的 *同纤维化*;
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$, 都有逐点的满射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))_*.$$

将该模型结构所呈现的范畴记为 $\text{dgCat}_k^{\text{DK}}$.

证明. [Tabuada, 2004]. □

上面的 Dwyer-Kan 模型结构保留 dg-范畴本身直到拟等价. 若只关心它所编码的模论, 还要进一步逆掉 *Morita* 等价: 即那些在右 dg-模的导出范畴上诱导等价的 dg-函子. 记这类态射为 W_{Mor} , 并记

$$\text{dgCat}_k^{\text{Mor}} := \text{N}(\text{dgCat}_k)[W_{\text{Mor}}^{-1}].$$

定理 3.1.23. (k 上的微分分次范畴与 k -线性稳定范畴) 记 Cat^{perf} 为小的、幂等完备的稳定范畴及正合函子所成的范畴. 则有范畴等价

$$\text{dgCat}_k^{\text{Mor}} \simeq \text{Mod}_{\text{Perf}(Hk)}((\text{Cat}^{\text{perf}})^{\otimes}).$$

换句话说, dg-范畴经过预三角化、幂等完备化并忽略 *Morita* 等价以后, 正好编码小的幂等完备 k -线性稳定范畴. 经由 Ind-完备化, 也可以把右端写成

$$\text{Mod}_{Hk\text{-Mod}}((\text{Pr}_{\text{st}, \omega}^L)^{\otimes}),$$

其中 $\text{Pr}_{\text{st}, \omega}^L$ 的对象是紧生成可表现稳定范畴, 态射是保持余极限并保持紧对象的函子.

证明. [Cohn, 2016] □

3.1.3 导出范畴

注记 3.1.24. 本节中的 Abel 1-范畴 $\mathcal{A}$ 以及链复形 1-范畴 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 都是普通范畴, $\mathbf{N}$ 表示普通脉. 花体记号 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 、 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 表示相应的范畴, 而

$$K(\mathcal{A}) := h\mathcal{K}(\mathcal{A}), \quad D(\mathcal{A}) := h\mathcal{D}(\mathcal{A})$$

表示经典的链同伦 1-范畴和导出 1-范畴.

本节从链复形出发构造导出范畴. 主角是关于拟同构的局部化; dg 脉、投射或内射消解以及后面的模型结构, 都是这一局部化的具体呈现或计算工具.

定义 3.1.25. 令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 1-范畴, HE_{ch} 和 qis 分别表示链同伦等价与拟同构. 定义

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}) := \mathbf{N}(\text{Ch}_*(\mathcal{A}))[\text{HE}_{\text{ch}}^{-1}], \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathbf{N}(\text{Ch}_*(\mathcal{A}))[\text{qis}^{-1}].$$

这里两处局部化均在 ∞ -范畴意义下取得; $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 称为**链同伦范畴**, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 称为**导出范畴**.

注记 3.1.26. 这个定义只依赖上述局部化的泛性质, 因而不依赖模型结构. 取同伦 1-范畴后才得到 Gabriel–Zisman 局部化 $D(\mathcal{A})$; 若一开始就在 1-范畴中作商, 映射空间里的高阶同伦信息便已经丢失.

标准 t-结构与有界导出范畴 本讲义的 t-结构采用稳定同伦的同调编号. 对链复形 M_* , 约定其上同调编号为

$$H^k(M_*) := H_{-k}(M_*).$$

这个负号是分辨 D^- 与 D^+ 方向的关键.

定义-命题 3.1.27. 令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 1-范畴. 定义 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的全子范畴

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})_{\geq n} := \{X : j < n \text{ 时 } H_j(X) = 0\} = \{X : k > -n \text{ 时 } H^k(X) = 0\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})_{\leq n} := \{X : j > n \text{ 时 } H_j(X) = 0\} = \{X : k < -n \text{ 时 } H^k(X) = 0\}.$$

则 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是稳定范畴, 而 $(\mathcal{D}(\mathcal{A})_{\leq 0}, \mathcal{D}(\mathcal{A})_{\geq 0})$ 是它的标准 t-结构, 其典范等价于 $\mathbf{N}(\mathcal{A})$. 内在定义

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}(\mathcal{A})_{\geq -n},$$

$$\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}(\mathcal{A})_{\leq n},$$

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) := \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}^+(\mathcal{A}).$$

换成上同调语言, $\mathcal{D}^-$ 中的对象在 $k \gg 0$ 时满足 $H^k = 0$, 因而是上有界的; $\mathcal{D}^+$ 中的对象在 $k \ll 0$ 时满足 $H^k = 0$, 因而是下有界的; $\mathcal{D}^b$ 则两边有界.

证明. 无环复形在平移、纤维与余纤维下封闭, 所以关于拟同构的局部化是稳定的. 任意 Abel 1-范畴中的标准好截断都保持拟同构, 因而在局部化后给出截断函子; t-结构公理与心的描述随即由链复形逐度验证. 具有足够投射对象时的上有界模型见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.19]; Grothendieck Abel 情形的无界性质见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.21]. $\square$

注记 3.1.28. 上面三个式子是 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 、 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 的定义; 它们不需要预先选择投射消解、内射消解或模型结构. 下面的链复形记号只是具体呈现.

接下来要做的是为这一抽象局部化寻找好用的具体模型.

根据命题 3.1.20, 微分分次脉给出

$$\mathrm{N}^{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})) \simeq \mathcal{K}(\mathcal{A}).$$

因此可以在链复形的某个合适全加性子范畴中选择消解, 使该子范畴中的拟同构成为链同伦等价, 再用 dg 脉计算导出范畴. 投射消解、内射消解和 K-内射消解都是这种做法的例子; 它们不是导出范畴的定义本身.

首先进行一些记号上的约定

记号 3.1.29. 令 $\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$ 为 $\mathcal{A}$ 中全体投射对象所张成的全子范畴. 类似地, 令 $\mathcal{A}_{\mathrm{inj}}$ 为 $\mathcal{A}$ 中全体内射对象所张成的全子范畴.

记号 3.1.30. 令 $\mathcal{A}$ 为加性 1-范畴, 并记

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}^-(\mathcal{A}) &:= \{M_* : i \ll 0 \text{ 时 } M_i = 0\}, \\ \mathrm{Ch}^+(\mathcal{A}) &:= \{M_* : i \gg 0 \text{ 时 } M_i = 0\}, \\ \mathrm{Ch}^b(\mathcal{A}) &:= \mathrm{Ch}^-(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Ch}^+(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

由于 $M^k = M_{-k}$, Ch^- 虽在同调指标上从下方截断, 却正是上同调指标上有界的模型; Ch^+ 则相反. 相应地记

$$\mathcal{K}^\epsilon(\mathcal{A}) := \mathrm{N}(\mathrm{Ch}^\epsilon(\mathcal{A}))[\mathrm{HE}_{\mathrm{ch}}^{-1}], \quad \epsilon \in \{-, +, b\}.$$

链复形与消解给出下列具体呈现.

命题 3.1.31. 包含函子诱导范畴等价

$$\mathrm{N}(\mathrm{Ch}^\epsilon(\mathcal{A}))[\mathrm{qis}^{-1}] \simeq \mathcal{D}^\epsilon(\mathcal{A}), \quad \epsilon \in \{-, +, b\}.$$

若 Abel 1-范畴 $\mathcal{A}$ 有足够投射对象, 则

$$\mathcal{K}^-(\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}) \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A}).$$

对偶地, 若 $\mathcal{A}$ 有足够内射对象, 则

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{A}_{\mathrm{inj}}) \simeq \mathcal{D}^+(\mathcal{A}).$$

证明. 对第一组等价, 标准好截断表明每个相应有限导出对象都可由具有严格界的链复形表示; 同一截断也把无界局部化中的态射计算限制回这些有限复形, 因而得到全忠实性. 投射与内射模型的经典结论见 [Zheng, 2024, Corollary 2.5.24], 范畴层面的陈述及其对偶见 [Lurie, 2017, Theorem 1.3.4.4]. 在 Grothendieck Abel 且具有足够投射对象的情形, 与无界导出范畴的比较也可见同文 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.24]. $\square$

注记 3.1.32. 上述等价说的是: 在选定投射或内射消解以后, 拟同构可由链同伦等价来检测. 它们是命题 3.1.27 中内在定义的有限导出范畴的模型, 而不是新的定义. 此外, [Lurie, 2017, Proposition 1.3.4.6] 表明 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 可由 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ 关于拟同构的反射局部化计算. 若只假设有足够投射对象, $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 一般不能用有限投射复形来呈现; 它对应 $\mathcal{K}^-(\mathcal{A}_{\text{proj}})$ 中上同调两边有限的对象.

不难发现有典范地范畴等价 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})^{\text{op}} \simeq \mathcal{D}^-(\mathcal{A}^{\text{op}})$.

以下说明导出范畴会是稳定的.

命题 3.1.33. 令 $\mathcal{A}$ 为加性 1-范畴, 则 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是稳定范畴.

证明. 详细证明见 [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.10], 在此只简述证明过程, 我们只需要证明以下两点:

- $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是带点范畴;
- $\Sigma: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ 是等价.

第一点是显然的, 至于第二点, 考虑以下链复形

$$E(1)_k = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \in \{0, 1\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它是 $\mathbb{Z}(\Delta^1)$ 所对应的正规化链复形. 则对于链复形间的态射 $f: M_* \rightarrow M'_*$, 其映射锥 $C(f)_*$ 定义为 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 中的推出

$$\begin{array}{ccc} M_* & \longrightarrow & E_*(1) \otimes M_* \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ M'_* & \longrightarrow & C(f)_* \end{array}$$

因而考虑 $C(M_* \rightarrow 0) = \Sigma M_*$, 计算得到其为链复形的平移函子 $M_* \mapsto M_{*-1}$, 而后者显然为范畴等价, 因此 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 稳定. $\square$

推论 3.1.34. 令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 1-范畴. 则 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 、 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ 都是稳定范畴; $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的标准 t -结构限制到这三个全子范畴上, 且其心都典范等价于 $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

证明. 由命题 3.1.27 的同调消失条件可知, 这三个全子范畴都关于平移、纤维与余纤维封闭, 标准截断也保持相应有限性. 心的陈述是标准 t -结构定义的一部分. $\square$

内射模型与 K-内射计算 (可跳读) 对于 **Grothendieck Abel 1-范畴**, 无界导出范畴仍由定义 3.1.25 中的局部化给出. Grothendieck 条件的额外好处是: 链复形上存在内射模型结构, 从而可以用 K-内射复形具体计算这个局部化.

命题 3.1.35. 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel 1-范畴*, 则 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})$ 上具有组合的内射模型结构:

弱等价. 弱等价是拟同构;

余纤维化. 余纤维化是逐度单射;

警告 3.1.36. 上述模型结构并非单纯模型结构, 因此不能直接套用定义-命题 2.1.1 中的单纯模型范畴公式; 这不影响它呈现同一个局部化.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.3]. 该证明依赖于 $\mathcal{A}$ 是可表现的以及 (AB5). $\square$

令 $\text{Ch}_*(\mathcal{A})^\circ$ 为该模型结构中双纤维性对象所张成的全 dg-子范畴. 由于每个对象都是余纤维性的, 这里的双纤维性对象正是 K-内射复形. 命题 3.1.39 将给出等价

$$\text{N}^{\text{dg}}(\text{Ch}_*(\mathcal{A})^\circ) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

所以左端是导出范畴的一种具体呈现, 而不是另一个定义.

注记 3.1.37. 纤维性替换在这里就是 K-内射消解, 因而可用 K-内射复形之间的 dg 映射复形计算 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的映射空间, 详见 [李文威, 2024, § 3.15]. 由内射对象组成的同调分次上有界链复形必然是 K-内射的, 因此 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是全子范畴.

接下来讨论 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的性质, 首先我们关注它是否是稳定的.

命题 3.1.38. 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel 1-范畴*, 则 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是稳定范畴.

证明. 使用上述 K-内射呈现, 只需说明它在 $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ 中构成稳定子范畴. 即说明对于 K-内射复形之间的态射 $f: M_* \rightarrow N_*$, 映射锥 $C(f)_*$ 仍是 K-内射的. 为此, 只需说明 $C(f)_* \rightarrow M_*[1]$ 是纤维化. 对于任意平凡余纤维化 $A_* \rightarrow B_*$, 这等价于以下图表中虚线

$$\begin{array}{ccc} A_* & \longrightarrow & C_*(f) \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow \\ B_* & \longrightarrow & M_*[1] \end{array}$$

的存在性. 而这实际上可以由 $N_*[1]$ 关于 $C_*(i) \hookrightarrow C_*(\text{id}_B)$ 的提升性质得到. $\square$

虽然警告 3.1.36 使我们不能直接套用单纯模型范畴的公式, 但这个内射模型结构仍然呈现定义 3.1.25 中的局部化:

命题 3.1.39. 令 $\mathcal{A}$ 为 *Grothendieck Abel* 1-范畴, 则典范函子 $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是关于拟同构的反射局部分化, 且命题 3.1.35 中的内射模型结构呈现 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. 特别地,

$$\mathrm{N}^{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}_*(\mathcal{A})^\circ) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

注记 3.1.40. 从而根据注记 2.1.2 可知其为可表现范畴.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.13, Proposition 1.3.5.14 配上 Proposition 1.3.5.15]. $\square$

最后记录 *Grothendieck* 条件为标准 t -结构带来的额外性质.

命题 3.1.41. 令 $\mathcal{A}$ 是 *Grothendieck Abel* 1-范畴, 则命题 3.1.27 中的标准 t -结构

- 可达 (定义 2.2.63);
- 右完备 (定义 2.2.59);
- 与滤余极限相容, 即 $\mathcal{D}(\mathcal{A})_{\leq 0}$ 关于 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 的滤余极限封闭.

警告 3.1.42. 一般而言 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 不会是左完备的.

证明. [Lurie, 2017, Proposition 1.3.5.21] $\square$

注记 3.1.43. 在 3.2 节中, 我们将从球状预层、满射拓扑与稳定化的角度重新刻画无界导出范畴. 此外, [Lurie, 2018b, Appendix C] 中所描述的 *Grothendieck* 预稳定范畴, 非分离导出范畴以及关于导出范畴的左完备化的处理属于本讲义的遗珠, 感兴趣的读者可自行探索.

注记 3.1.44. 此外, 导出范畴具有下降性质, 可参见 [Heyer and Mann, 2024, Proposition A.4.23]

3.1.4 导出范畴的泛性质

本节来揭示导出范畴的泛性质, 在本节中我们只研究 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ 的泛性质, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ 是对偶得到的.

定义 3.1.45. 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 为配有 t -结构的稳定范畴,

- 称函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为右 t -正合的是指其正合且将 $\mathcal{C}_{\geq 0}$ 映到 $\mathcal{C}'_{\geq 0}$;
- 称函子 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 为左 t -正合的是指其正合且将 $\mathcal{C}_{\leq 0}$ 映到 $\mathcal{C}'_{\leq 0}$;
- 称函子为 t -正合是指其既右 t -正合又左 t -正合.

导出范畴具有以下泛性质:

定理 3.1.46. 令 $\mathcal{A}$ 为带有足够投射对象的 *Abel* 1-范畴, 且 $\mathcal{C}$ 为带有左完备的 *t*-结构的稳定范畴, 且 $\mathcal{E} \subseteq \text{Fun}(\mathcal{D}^-(\mathcal{A}), \mathcal{C})$ 为由全体将 $\mathcal{A}$ 中投射对象打到 $\mathcal{C}^\heartsuit$ 的右 *t*-正合函子所张成的全子范畴, 则 $F \mapsto \tau_{\leq 0} \circ (F|_{\mathcal{D}^-(\mathcal{A})^\heartsuit})$ 给出从 $\mathcal{E}$ 到 $\text{Fun}^{\text{rex}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^\heartsuit)$ 的范畴等价, 此处 Fun^{rex} 是右正合函子所张成的全子范畴.

注记 3.1.47. 该泛性质相当于说: 给定右正合函子 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^\heartsuit$, 它就可以以一种本质唯一的方式提升为稳定范畴间的右 *t*-正合函子 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$.

证明. [Lurie, 2017, Theorem 1.3.3.2]. □

因此, 我们可以得到一些有趣的结果:

例 3.1.48. 根据命题 2.2.67, 我们知道 $\text{Sp}^\heartsuit \simeq \text{Ab}$. 因此, 当 $\mathcal{A}$ 具有足够投射对象时, 给定右正合函子 $\mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ 就相当于给出满足定理 3.1.46 中条件的函子 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Sp}$. 我们称由此得到的函子为广义 **Eilenberg–MacLane 谱**. 特别地, 对 $\mathcal{A} = \text{Ab}$ 取恒等函子, 得到 $H^-: \mathcal{D}^-(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}$; 通常的 Eilenberg–MacLane 函子 $H: \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}$ 是它在无界导出范畴上的延拓.

例 3.1.49. 经典的导出函子也可以通过上述泛性质进行解释. 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 都具有足够投射对象; 给定右正合函子 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 它可以本质唯一地确定左导出函子 $\mathbf{L}f: \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$.

最后, 我们来说明导出范畴是具有函子性的

命题 3.1.50. 令 $\text{Cat}^{\text{proj}, \text{Ab}, \text{ex}, (1)} \subseteq \text{Cat}_{(1)}$ 为全体具有足够投射对象的 *Abel* 1-范畴及其间正合函子所张成的全子范畴, 则

$$\mathcal{D}^-: \text{Cat}^{\text{proj}, \text{Ab}, \text{ex}, (1)} \rightarrow \text{Cat}, \mathcal{A} \mapsto \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$$

构成函子.

证明. 正合函子 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 逐度作用给出 $\text{Ch}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}^-(\mathcal{B})$, 并保持拟同构. 由命题 3.1.31 的局部化泛性质, 它诱导 $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$. 逐度构造严格保持恒等函子与复合, 因而这些诱导函子组成所述函子. □

§ 3.2 谱值球状预层与 Grothendieck *Abel* 导出范畴 (选读)

在 3.1.3 节中, 我们把 Grothendieck *Abel* 1-范畴的无界导出范畴定义成关于拟同构的局部化. 本节换一个入口: 不再从链复形的具体呈现出发, 而是问能否只用一小族生成元上的谱值预层把整个导出范畴恢复出来. 答案是肯定的, 但一般情形需要在生成元上加入一个满射拓扑. 本节的主要参考是 [Pstrągowski, 2022, § 2.5].

3.2.1 球状预层及其稳定化

令 $\mathcal{C}$ 为本质小的加性 1-范畴. 我们记

$$\mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}^{\Pi}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$$

以及

$$\mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp}) := \mathrm{Fun}^{\Pi}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sp}).$$

上标 Π 表示保持有限乘积. 因为 $\mathcal{C}$ 是加性的, 这也可以说成: 这些反变函子把 $\mathcal{C}$ 中的有限直和送到目标范畴中的有限乘积. 我们把前者称为球状预层, 把后者称为谱值球状预层.

命题 3.2.1. 逐对象取谱给出范畴等价

$$\mathbf{Sp}(\mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp}).$$

换言之, 谱值球状预层范畴是球状预层范畴的稳定化, 而不是整个预层范畴 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 的稳定化.

证明. 这是 [Pstrągowski, 2022, Proposition 2.13] 在平凡拓扑下的情形. $\square$

3.2.2 紧投射生成的情形

先把所需的生成条件说清楚. 令 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck Abel 1-范畴. 称本质小的全子范畴 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ 为一个紧生成元系统, 如果:

- $\mathcal{P}$ 的每个对象都是 $\mathcal{A}$ 中的紧对象;
- $\mathcal{P}$ 沿余极限生成 $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{P}$ 包含零对象;
- $\mathcal{P}$ 沿满射的拉回封闭: 若 $P \twoheadrightarrow Q$ 是 $\mathcal{P}$ 中在 $\mathcal{A}$ 里为满射的态射, 且 $P' \rightarrow Q$ 是 $\mathcal{P}$ 中任意态射, 则 $P \times_Q P'$ 仍属于 $\mathcal{P}$.

这些条件特别保证 $\mathcal{P}$ 对有限直和封闭, 因而 $\mathcal{P}$ 本身是加性 1-范畴.

如果 $\mathcal{P}$ 中每个对象还是投射的, 就称它为紧投射生成元系统. 这时不需要先加任何非平凡的下降条件, 受限 Yoneda 构造直接给出

定理 3.2.2. 设 Grothendieck Abel 1-范畴 $\mathcal{A}$ 具有紧投射生成元系统 $\mathcal{P}$. 则包含函子 $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 诱导出范畴等价

$$\mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathcal{A})$$

以及

$$\mathrm{PSh}_{\Sigma}(\mathcal{P}, \mathbf{Sp}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

证明. 第一式是 [Pstrągowski, 2022, Lemma 2.60], 第二式是同文的 Lemma 2.61. 后一个等价正是把前一个等价的两端稳定化: 左边使用命题 3.2.1, 右边则使用 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 标准 t-结构的右完备性. $\square$

这个结论可以看作 Dold–Kan 对应的稳定版本. 例如, 对环 R 取 $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$, 并令 $\mathcal{P}$ 为有限生成投射 R -模所构成的 1-范畴, 就从生成元上的谱值球状预层恢复出无界导出范畴 $\mathcal{D}(R)$.

3.2.3 满射拓扑与一般情形

如果紧生成元不再投射, 受限 Yoneda 函子的本质像通常不再是全部球状预层; 从全部球状预层中切出本质像所缺少的条件正是局部提升, 也就是下降. 在紧生成元系统 $\mathcal{P}$ 上定义 **满射 Grothendieck 预拓扑**: 一个覆盖族必须只含一个态射

$$Q \twoheadrightarrow P,$$

并且这个态射在 $\mathcal{A}$ 中是满射. 沿满射的拉回封闭保证这确实构成预拓扑. 记

$$\text{PSh}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Set}) := \text{Fun}^\Pi(\mathcal{P}^{\text{op}}, \text{Set}),$$

并用 $\text{Shv}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Set})$ 表示其中满足上述下降条件的球状层.

定理 3.2.3. (Goerss–Hopkins) 设 $\mathcal{P}$ 是 Grothendieck Abel 1-范畴 $\mathcal{A}$ 的紧生成元系统. 受限 Yoneda 函子

$$y: \mathcal{A} \longrightarrow \text{PSh}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Set}), \quad y(M)(P) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, M),$$

是全忠实的, 且其本质像恰好是满射拓扑下的球状层. 因而有范畴等价

$$\mathcal{A} \simeq \text{Shv}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Set}).$$

证明. 参见 [Pstrągowski, 2022, Theorem 2.58]. $\square$

在谱值情形中, 普通层条件还不够描述无界导出范畴; 正确对象是满足超下降的谱值球状层. 记它们所构成的范畴为 $\widehat{\text{Shv}}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Sp})$.

定理 3.2.4. 设 $\mathcal{P}$ 是 Grothendieck Abel 1-范畴 $\mathcal{A}$ 的任意紧生成元系统. 则包含函子 $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 唯一地延拓为范畴等价

$$\widehat{\text{Shv}}_\Sigma(\mathcal{P}, \text{Sp}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

证明. 参见 [Pstrągowski, 2022, Theorem 2.64]. $\square$

最后回头看紧投射情形. 因为满射到投射对象必然分裂, $\mathcal{P}$ 中的每个满射覆盖都是分裂覆盖, 不会再施加新的非平凡下降条件. 因此定理 3.2.4 在这一情形正好恢复定理 3.2.2 中的预层公式. 这也说明了两种写法的分工: 有足够紧投射生成元时用预层即可; 对一般紧生成元, 则要把满射下降和超完备性一并记入.

Part II.

单子、高阶代数与下降

第 4 章

从伴随到单子

§ 4.1 本部分的目标与路线

这一部分围绕三个问题展开：怎样用高阶相容的方式编码代数结构？怎样从一个伴随产生的单子恢复原范畴？怎样把这种恢复机制组织成下降理论？与第一部分的联系在于，谱与稳定范畴提供了最重要的工作环境，而这里发展的单子、模与下降工具则解释了这些环境中的代数对象如何构造和拼接。

章节次序反映了证明所需的语言，不必理解成唯一的阅读顺序。本章先用自由幺半群给出单子的动机。下一章建立代数模式、算畴、线性范畴与模的语言；严格定义高阶单子和证明 Barr-Beck 定理都要用到这套语言。生象化章是从有限自由对象、Lawvere 理论与筛余完备化出发的另一条自足支线，它说明经典代数结构怎样进入同伦世界，但不是 Barr-Beck 定理的逻辑前提。随后的两章依次处理单子性与 Beck-Chevalley 型下降，最后一章把它们用于交换环谱。

可以据此选择以下路线：

- 若目标是单子与下降，读完本章后，至少阅读高阶代数章中关于算畴、 $\mathcal{O}$ -幺半范畴、线性范畴与模的内容，然后转到 Barr-Beck、下降和交换环谱的下降。附录 A 是这条路线的工具箱，在正文引用到时查阅即可。
- 若目标是生象化，可以从本章直接跳到生象化章。该章从有限自由对象与 Lawvere 理论开始，自足给出“例子—一般机制—应用”的完整路线；第一部分的 Dold-Kan 只作为比较背景，不是阅读该章的逻辑前提。
- 若只想学习高阶代数的编码方式，可以独立阅读下一章，暂时略过单子性与下降的长证明。

本部分的定义和主要结论都在范畴内部由泛性质表达。单纯集、模型范畴等具体模型偶尔可以用来实现这些对象，但不是下文论证的一部分；只走主线的读者无需固定任何模型。

本部分沿用全书引言中的符号与层次约定, 这里只补充两项局部约定. “静态”表示落在相应 t -结构心中的通常对象; 特别地, 静态交换环所成的范畴记为 $\mathbf{CRing}^{\text{static}}$, 静态 R -模就是通常的 R -模, 而不加限定的“交换环”默认指 $\mathbf{Sp}$ 中的交换代数, 它们所成的范畴记为 $\mathbf{CAlg}$. 此外, 本部分所说的共首函子 (initial functor) 对应 [Lurie, 2018a, Tag 02N0] 中的“右共尾函子”, 共尾函子 (final functor) 对应其中的“左共尾函子”; 后文作对偶论证时会用到这个方向约定.

§ 4.2 动机: 从伴随到单子

我们先在 1-范畴中来看集合范畴 $\mathbf{Set}$ 与幺半群范畴 $\mathbf{Monoid}$ 之间最熟悉的自由-遗忘伴随. 记 $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Monoid}$ 为自由函子, $U: \mathbf{Monoid} \rightarrow \mathbf{Set}$ 为遗忘函子, 那么这个伴随可以写成

$$F: \mathbf{Set} \rightleftarrows \mathbf{Monoid}: U, \quad F \dashv U.$$

复合 $T := U \circ F$ 是 $\mathbf{Set}$ 上的自函子. 对于集合 X , $T(X)$ 就是由 X 中元素生成的自由幺半群的底集合, 也就是由 X 中元素组成的全体有限字:

$$T(X) = \coprod_{n \geq 0} X^n.$$

这里 X^0 是单点集, 对应于空字.

如果只盯着函子 T , 那么幺半群结构似乎已经被遗忘了; 不过完整的伴随还带有更多信息. 具体来说, 我们有伴随的单位 $\eta: \text{id}_{\mathbf{Set}} \rightarrow U \circ F = T$ 以及余单位 $\varepsilon: F \circ U \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Monoid}}$. 于是一个很自然的问题是: 能不能只用 T 以及由 η, ε 诱导的自然变换, 把幺半群范畴重新找回来? 答案是肯定的. 为了看清这一点, 我们先把 T 从伴随中继承的结构写出来.

首先, 伴随单位本身给出 T 的单位运算

$$\eta: \text{id}_{\mathbf{Set}} \longrightarrow T.$$

对于 $x \in X$, 映射 $\eta_X: X \rightarrow T(X)$ 把 x 送到只含一个字母的字 (x) .

其次, 余单位给出乘法运算

$$\mu := U\varepsilon F: T^2 \longrightarrow T.$$

$T^2(X)$ 的元素可以看成“由字组成的字”, 也就是由 X 中元素构成的有限列表的有限列表. 映射 μ_X 所做的事情很朴素: 把这些列表摊平并首尾相接. 例如

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m), \dots) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \dots).$$

对任意 1-范畴 $\mathcal{C}$, 我们统一记

$$\text{End}(\mathcal{C}) := \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^\circ, \quad S \otimes T := S \circ T,$$

其中上标 $\circ$ 表示由函子复合给出的幺半结构; 按照这个约定, S 在 T 之后作用. 换一种说法, T 是幺半范畴 $\text{End}(\text{Set})$ 中的代数对象. 单位律与结合律分别由下列交换图表表达:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \xleftarrow{T\eta} T \\ & \searrow \text{id}_T & \downarrow \mu \swarrow \text{id}_T \\ & & T \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{\mu T} & T^2 \\ T\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T. \end{array}$$

我们把这样的三元组 (T, η, μ) 称为 Set 上的一个单子. 这是高阶定义的 1-范畴影子: 推广到范畴以后, “ T 是自函子范畴中的代数对象” 仍是正确说法, 只是代数对象会自动携带全部高阶相容性, 不能只靠上面两个交换图表来定义.

接下来看看怎样从中恢复代数结构. 一个 T -模 (也常称为 T -代数) 是二元组 (M, a) , 其中 M 是集合, $a: T(M) \rightarrow M$ 是结构映射, 并且下列两个图表交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & T(M) \\ & \searrow \text{id}_M & \downarrow a \\ & & M \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} T^2(M) & \xrightarrow{T(a)} & T(M) \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow a \\ T(M) & \xrightarrow{a} & M. \end{array}$$

如果把 a 理解为 “把一个有限列表中的元素全部乘起来”, 那么这两个图表恰好就是幺元公理和结合律. 这也解释了单子为什么能够编码代数结构.

两个 T -模 (M, a) 与 (N, a') 之间的态射是一个与结构相容的映射 $f: M \rightarrow N$, 即下图交换:

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{a} & M \\ T(f) \downarrow & & \downarrow f \\ T(N) & \xrightarrow{a'} & N. \end{array}$$

直接检查可知, 在当前例子中这正是幺半群同态的条件. 经典记号 Set^T 与后文的左模记号描述的是同一个范畴, 因而有等价

$$\text{Set}^T \simeq \text{LMod}_T(\text{Set}) \simeq \text{Monoid}.$$

也就是说, 我们确实只用自由-遗忘伴随诱导的单子就恢复了整个幺半群范畴. 对于一般伴随

$$F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G, \quad F \dashv G,$$

自然要问: 什么时候 $\mathcal{D}$ 也能由诱导单子的左模范畴恢复出来? 这正是 Lurie-Barr-Beck 单子性定理要回答的问题. 单子、单子的模以及它们与伴随之间的关系, 也会成为这一部分的主线.

第 5 章

高阶代数的基本观念

本章打算以 [Chu and Haugseng, 2021] 中发展出来的代数模式为基本框架, 来介绍高阶代数理论.

高阶代数真正想记录的, 是带有多个输入的运算以及它们之间的所有高阶相容性. 例如, 要在对称幺半范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中描述一种代数对象, 我们需要理解形如

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow Y$$

的 n 元运算. 可是在一般的对称幺半范畴中, 直接把这些运算逐项展开, 再逐条写出它们的相容性, 很快就会变得难以操作. 在本章主要关心的标准情形中, 算畴的基本想法是先用乘积模式整理运算的形状与输入资料: 惰性态射充当投影, 把一系列输入拆成各个分量; Segal 条件再用乘积把整列资料从这些分量复原. 活性态射只规定输入如何汇成输出, 而算畴中位于活性态射之上的态射才记录抽象的多元运算. 最后, 给定算畴的一个代数 A , 这些抽象运算才在 $\mathcal{C}$ 中解释为

$$A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n) \longrightarrow A(y).$$

这样, 乘积分解保证结构能够在范畴内部刻画, 张量态射则真正承载高阶代数运算.

全章的安排如下:

- 在 § 5.1 中, 我们先来定义代数模式, 并给出一些后文会反复用到的例子.
- 在 § 5.2 中, 我们讨论由代数模式所编码的代数对象, 并把它们称为 “Segal 对象”. 随后再回到 § 5.1 的例子, 看看这个定义究竟在说什么.
- 在 § 5.3 中, 我们引入代数模式上的算畴. 粗略来说, 对于代数模式 $\mathcal{P}$, 一个 $\mathcal{P}$ -算畴 $\mathcal{O}$ 的颜色与多元运算按照 $\mathcal{P}$ 的惰性-活性结构组织, 并满足由 $\mathcal{P}$ 的初等对象控制的 Segal 分解. 我们会以 **Comm**-算畴为主例来解释这件事.
- 在 § 5.4 中, 我们对乘积模式 $\mathcal{O}$ (定义 5.4.1) 定义 $\mathcal{O}$ -幺半范畴与 $\mathcal{O}$ -代数.

- 在 § 5.5 中, 我们研究无么 $\mathbb{A}_n$ -代数. 其中会证明: 若 $\mathcal{C}$ 是么半 $(m, 1)$ -范畴, 那么只要 $n \geq m + 2$, 就有等价

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathbb{A}_n}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C}).$$

- 在 § 5.6 与 § 5.7 中, 我们构造 Op 上的对称么半结构, 并用它说明小 k -立方算畴 $\mathbb{E}_k$ (定义 5.7.2) 与模式 $\mathbf{E}_k \simeq \mathbf{Assoc}^{\times k}$ (定义 5.1.12) 编码的是同一份资料. 因而, 若 $\mathcal{C}$ 是对称么半 $(m, 1)$ -范畴, 那么只要 $k \geq m + 1$, 就有等价

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathcal{C}).$$

- 最后, 我们再介绍几种后续章节会用到的对称么半结构.

若想系统了解这些内容, 可以参考 [Cnossen, 2025b] 与 [Haugseeng, 2023] 中相当出色的综述.

§ 5.1 代数模式

代数模式可以看成一张蓝图: 它告诉我们, 固定范畴上的哪些函子应当满足某种 Segal 条件. 在以乘积为么半结构的情形下, 这套语言尤其适合形式化同伦相容的代数结构.

粗略来说, 代数模式一方面把算畴中的活性态射与惰性态射推广出来, 另一方面挑出某些对象, 让它们来控制 Segal 条件.

定义 5.1.1. 一个代数模式是指范畴 $\mathcal{O}$ 配上以下资料:

1. 一族称为初等对象的对象.
2. 一个分解系统 $(\mathcal{O}^{\mathrm{惰}}, \mathcal{O}^{\mathrm{活}})$, 使得每个态射都可以唯一地 (在相差等价的意义上) 分解成一个惰性态射, 再接上一个活性态射.

记 $\mathcal{O}^{\mathrm{el}}$ 为由初等对象以及它们之间的惰性态射所张成的全子范畴. 对于任意对象 $X \in \mathcal{O}$, 再记

$$\mathcal{O}_{X/}^{\mathrm{el}} := \mathcal{O}^{\mathrm{el}} \times_{\mathcal{O}^{\mathrm{惰}}} \mathcal{O}_{X/}^{\mathrm{惰}}.$$

换句话说, 这是所有惰性态射 $X \rightarrow E$ 所构成的范畴, 其中 $E \in \mathcal{O}^{\mathrm{初}}$.

从代数模式 $\mathcal{O}$ 到 $\mathcal{P}$ 的一个态射, 是指保持惰性态射、活性态射以及初等对象的函子 $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$.

我们用 $\mathrm{AlgPatt}$ 表示代数模式所构成的范畴.

注记 5.1.2. 范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个分解系统, 是指一对包含所有对象的子范畴 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$, 满足如下条件: 对于任意态射 $f: X \rightarrow X'$, 所有满足 $l \in \mathcal{L}$ 与 $r \in \mathcal{R}$ 的分解 $X \xrightarrow{l} Y \xrightarrow{r} X'$ 所构成的

生象是可缩的.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & Y & \\ l \in \mathcal{L} \nearrow & & \searrow r \in \mathcal{R} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \right\}$$

命题 5.1.3. AlgPatt 具有极限与滤过余极限, 而且遗忘函子

$$\text{AlgPatt} \rightarrow \text{Cat}$$

保持这些极限与滤过余极限.

证明. [Chu and Haugseng, 2021, 推论 5.5] □

定义 5.1.4. (平凡模式) 平凡模式 Triv 是 AlgPatt 的终对象. 它的底范畴就是终范畴 $*$.

定义 5.1.5. (空模式) 空模式 $\emptyset$ 是 AlgPatt 的初始对象. 它的底范畴就是初始范畴 $\emptyset$.

定义 5.1.6. (交换模式) 考虑带点有限集所构成的范畴 Fin_* , 并记 $\langle n \rangle := (\{0, 1, \dots, n\}, 0)$. 对于态射 $f: \langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$, 我们说它是:

- 惰性的, 如果 f 限制为同构 $\langle n \rangle \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \langle m \rangle \setminus \{0\}$.
- 活性的, 如果 $f^{-1}(0) = \{0\}$.

取 $\langle 1 \rangle$ 为唯一的初等对象, 便把 Fin_* 做成了一个代数模式, 记为 **Comm**. 我们把它称为交换模式.

注记 5.1.7. 在定义 5.1.6 中, 如果改取 $\langle 0 \rangle$ 与 $\langle 1 \rangle$ 为初等对象, 就会得到另一个代数模式 Fin_*^b .

定义 5.1.8. (结合模式) 考虑单纯形范畴的反范畴 Δ^{op} . 其中的态射 $f: [n] \rightarrow [m]$ 称为:

- 惰性的, 如果它在 Δ 中对应的映射 $g: [m] \rightarrow [n]$ 是区间嵌入 (也就是说, 它的像是一段连续的整数).
- 活性的, 如果它在 Δ 中对应的映射 $g: [m] \rightarrow [n]$ 保持端点 (也就是说, $g(0) = 0$ 且 $g(m) = n$).

取 $[1]$ 为唯一的初等对象. 由此得到的代数模式记为 **Assoc**, 称为结合模式.

定义 5.1.9. ($\mathbb{A}_n$ -模式) 对于 $1 \leq n \leq \infty$, 令 $\mathbb{A}_n$ 表示 Δ^{op} 中由 $0 \leq m \leq n$ 的对象 $[m]$ 所张成的全子范畴.

$\mathbb{A}_n$ 从 **Assoc** 继承代数模式结构: 惰性态射与活性态射恰好就是在 **Assoc** 中惰性或活性的那些态射, 初等对象则是 $[1]$. 我们称 $\mathbb{A}_n$ 为 $\mathbb{A}_n$ -模式.

注记 5.1.10. 不难发现, $\mathbb{A}_\infty$ -模式就是结合模式.

定义 5.1.11. (无么 $\mathbb{A}_n$ -模式) 令 $\Delta_{\text{inj}} \subseteq \Delta$ 表示这样的子范畴: 其中的态射都是严格递增映射 $[m] \hookrightarrow [n]$. 对于 $0 \leq n \leq \infty$, 令 $\mathbb{A}_n^{\text{nu}}$ 表示 $\Delta_{\text{inj}}^{\text{op}}$ 中由 $1 \leq m \leq n$ 的对象 $[m]$ 所张成的全子范畴 (所以 $\mathbb{A}_0^{\text{nu}} \simeq \emptyset$).

$\mathbb{A}_n^{\text{nu}}$ 同样从 **Assoc** 继承代数模式结构: 惰性态射与活性态射恰好就是在 **Assoc** 中惰性或活性的态射, 初等对象为 $[1]$. 我们称 $\mathbb{A}_n^{\text{nu}}$ 为无么 $\mathbb{A}_n$ -模式.

定义 5.1.12. ($\mathbb{E}_k$ -模式) 考虑 k 个单纯形范畴反范畴的乘积 $\Delta^{k, \text{op}} := (\Delta^{\text{op}})^{\times k}$, 并在其上取如下分解系统: 一个态射是惰性或活性的, 当且仅当它的每个分量在 **Assoc** 中都是惰性或活性的. 我们取对象 $([1], \dots, [1])$ 为唯一的初等对象. 由此得到的代数模式记为 $\mathbb{E}_k$, 称为 $\mathbb{E}_k$ -模式.

注记 5.1.13. 在 § 5.7 中, 我们会讨论 $\mathbb{E}_k$ -模式与 $\mathbb{E}_k$ -算畴 (定义 5.7.2) 之间的关系.

接下来我们介绍几种与模有关模式.

定义 5.1.14. (交换模模式) 交换模模式 **CM** 的底范畴是 $\text{Fin}_{*, \langle 1 \rangle} /$. 它的分解系统沿着典范左纤维化 $\text{Fin}_{*, \langle 1 \rangle} / \rightarrow \text{Fin}_*$ 从 **Comm** 提升而来. 初等对象则是 $\langle 1 \rangle \rightarrow \{0\} \subseteq \langle 1 \rangle$ 与 $\text{id}_{\langle 1 \rangle}$.

按照这个构造, $\text{Fin}_{*, \langle 1 \rangle} /$ 中的对象 $\langle 1 \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ 可以看成是一个二元组 $(\langle n \rangle, i)$, 其中 i 是 $1 \in \langle 1 \rangle$ 的像. **CM** 中形如 $f: (\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle h \rangle, j)$ 的态射, 就是满足 $f(i) = j$ 的带点映射 $\langle n \rangle \rightarrow \langle h \rangle$.

定义 5.1.15. (双模模式) 双模模式 **BM** 的底范畴是 $(\Delta_{/[1]})^{\text{op}}$. 它的分解系统沿典范左纤维化 $(\Delta_{/[1]})^{\text{op}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$ 从 **Assoc** 提升而来. 初等对象则是 $[1] \simeq \{0\} \rightarrow [1]$ 、 $[1] \simeq \{1\} \rightarrow [1]$ 以及 $\text{id}_{[1]}$.

按照构造, $\Delta_{/[1]}$ 中的对象 $[n] \rightarrow [1]$ 可以看成是一个有序序列 $(i_0, \dots, i_n)$, 其中 $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_n \leq 1$. 三个初等对象分别对应序列 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 与 $(1, 1)$.

定义 5.1.16. (左模模式的一种单纯形描述) 左模模式 **LM** 的底范畴是 $\Delta^{\text{op}} \times [1]$. 考虑函子 $T: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$, 它把 $[n]$ 送到 $[n] \star [0] \simeq [n+1]$. 于是这个函子诱导出

$$(T \rightarrow \text{id}): \Delta^{\text{op}} \times [1] \rightarrow \Delta^{\text{op}}.$$

LM 的代数模式结构沿 $(T \rightarrow \text{id})$ 从 **Assoc** 提升而来. 更具体地说,

- $\Delta^{\text{op}} \times \{1\}$ 恰好就是 **Assoc**.
- 对每个 $[n] \in \Delta$, 所诱导的态射 $([n], 0) \rightarrow ([n], 1)$ 是 **LM** 中的惰性态射.
- 如果 $f: [h] \rightarrow [n]$ 是 Δ 中满足 $f(h) = n$ 的惰性态射, 那么对应的态射 $([n], 0) \rightarrow ([h], 0)$ 是 **LM** 中的惰性态射.

- 如果 $g: [h] \rightarrow [n]$ 是 Δ 中满足 $g(0) = 0$ 的态射, 那么对应的态射 $([n], 0) \rightarrow ([h], 0)$ 是 LM 中的活性态射.
- LM 的初等对象是 $([0], 0)$ (通常记为 $\mathbf{m}$) 与 $([1], 1)$ (通常记为 $\mathbf{a}$).

记 5.1.17. 这里说“左”还是“右”只是一种约定; 同一个代数模式也可以编码右作用.

§ 5.2 Segal 对象

由代数模式所刻画的代数, 就称为 Segal 对象.

定义 5.2.1. 令 $\mathcal{O}$ 为代数模式. 若对于每个 $O \in \mathcal{O}$, 函子 $X: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}$ 所诱导的复合

$$(\mathcal{O}_{O'}^{\text{初}})^{\triangleleft} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$$

是极限图表, 就称 X 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 Segal $\mathcal{O}$ -对象. 如果对于每个 $O \in \mathcal{O}$, $\mathcal{C}$ 都具有以 $\mathcal{O}_{O'}^{\text{初}}$ 为指标的图表的极限, 我们就称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{O}$ -完备的. 在这种情况下, 上述条件等价于说典范态射

$$X(O) \rightarrow \varprojlim_{E \in \mathcal{O}_{O'}^{\text{初}}} X(E)$$

是等价.

现在来看几个例子, 顺便体会一下代数模式究竟怎样工作.

例 5.2.2. (Segal Triv-对象) 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. 那么 $\mathcal{C}$ 中的 Segal Triv-对象, 无非就是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象.

例 5.2.3. (Segal Comm-对象) 令 $\mathcal{C}$ 为具有有限积的范畴, 并令 $X: \mathbf{Comm} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. X 的 Segal 条件是

$$X(\langle n \rangle) \simeq \varprojlim_{(\langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle) \in \mathbf{Comm}^{\text{triv}}} X(\langle 1 \rangle).$$

我们可以把范畴 $\mathbf{Comm}_{\langle n \rangle}^{\text{triv}}$ 识别为惰性态射所构成的集合 $\{\rho_i: i = 1, \dots, n\}$, 其中 $\rho_i: \langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ 定义为

$$\rho_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{若 } j = i, \\ 0 & \text{若 } j \neq i. \end{cases}$$

因而 Segal 条件是在说典范映射

$$(\rho_i^*)_{i=1}^n: X(\langle n \rangle) \rightarrow \prod_{i=1}^n X(\langle 1 \rangle)$$

是等价. 这意味着, 对每个非基点元素 $i \in \langle n \rangle$ (也就是 $i \neq 0$), 我们都可以指定一个相应的对象 $x_i \in X(\langle 1 \rangle)$. 所以 $X(\langle n \rangle)$ 中的对象可以写成序列 $(x_1, \dots, x_n)$.

接下来看看惰性态射与活性态射各自在做什么:

- 令 $f: \langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$ 为 **Comm** 中的惰性态射. 那么 f 对应投影

$$\begin{aligned} X(f): X(\langle n \rangle) &\simeq X(\langle 1 \rangle)^n \longrightarrow X(\langle 1 \rangle)^m \simeq X(\langle m \rangle), \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{f^{-1}(1)}, \dots, x_{f^{-1}(m)}). \end{aligned}$$

- 令 $g: \langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$ 为 **Comm** 中的活性态射, 并对 $j \in \{1, \dots, m\}$ 记 $I_j := g^{-1}(j)$. 那么 g 对应态射

$$\begin{aligned} X(g): X(\langle n \rangle) &\simeq X(\langle 1 \rangle)^n \longrightarrow X(\langle 1 \rangle)^m \simeq X(\langle m \rangle), \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left(\prod_{i_1 \in I_1} x_{i_1}, \dots, \prod_{i_m \in I_m} x_{i_m} \right). \end{aligned}$$

特别地, 交换 1 与 2 的活性态射 $s: \langle 2 \rangle \rightarrow \langle 2 \rangle$ 对应映射 $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$, 它迫使乘法满足交换律. 因此活性态射刻画的正是“交换乘法”.

取 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 时, 不难发现 Segal **Comm**-对象恰好就是交换么半群.

例 5.2.4. (Segal **Assoc**-对象) 令 $\mathcal{C}$ 为具有有限积的范畴, 并令 $X: \mathbf{Assoc} \rightarrow \mathcal{C}$ 为单纯对象. X 的 Segal 条件是

$$X([n]) \simeq \varprojlim_{([n] \rightarrow [1]) \in \mathbf{Assoc}^{\text{惰}}} X([1]).$$

我们来分析一下这里的极限. Δ^{op} 中的惰性态射 $e_i: [n] \rightarrow [1]$, 对应于 Δ 中像为 $\{i-1, i\}$ 的嵌入 $[1] \hookrightarrow [n]$. 注意到 $[n]$ 是全序集, 可以把它想成被切成了 n 段:

$$[n] = \left\{ 0 \xrightarrow{e_1} 1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_n} n \right\},$$

其中线段 $i-1 \rightarrow i$ 对应惰性态射 e_i . Segal 条件是在说典范映射

$$(e_i^*)_{i=1}^n: X([n]) \rightarrow \prod_{i=1}^n X([1])$$

是等价. 也就是说, 对于 $[n]$ 中的每条箭头 $i-1 \rightarrow i$, 我们都可以配上一个对象 $x_i \in X([1])$. 所以 $X([n])$ 中的对象可以写成序列 $(x_1, \dots, x_n)$.

接下来看看惰性态射与活性态射各自在做什么:

- 令 $f: [n] \rightarrow [m]$ 为 **Assoc** 中的惰性态射, 并令 $f^{\text{op}}: [m] \rightarrow [n]$ 为它在 Δ 中对应的态射. 在 Segal 对象 X 中, 态射 $X(f)$ 对应投影

$$\begin{aligned} X([n]) &\simeq X([1])^n \longrightarrow X([1])^m \simeq X([m]), \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{f^{\text{op}}(1)}, \dots, x_{f^{\text{op}}(m)}). \end{aligned}$$

- 令 $g: [n] \rightarrow [m]$ 为 **Assoc** 中的活性态射. 对 $j \in \{1, \dots, m\}$ 记

$$I_j := \{g^{\text{op}}(j-1) + 1, \dots, g^{\text{op}}(j)\}.$$

在 Segal 对象 X 中, 态射 $X(g)$ 对应

$$\begin{aligned} X([n]) &\simeq X([1])^n \longrightarrow X([1])^m \simeq X([m]), \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left(\prod_{i_1 \in I_1} x_{i_1}, \dots, \prod_{i_m \in I_m} x_{i_m} \right), \end{aligned}$$

它刻画的正是“乘法”.

取 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ 时, Segal **Assoc**-对象恰好就是幺半群.

注记 5.2.5. 注意到:

- **Assoc** 中的态射 $[0] \rightarrow [1]$ 对应态射 $1: * \rightarrow X([1])$, 也就是结合代数的幺元.
- 退化态射 $s^i: [n] \rightarrow [n-1]$ 对应态射

$$\begin{aligned} X([n-1]) &\longrightarrow X([n]), \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) &\longmapsto (x_1, \dots, \underset{\text{第 } i \text{ 位}}{1}, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

所以, 如果把这些资料去掉, 我们就会得到 Segal $\mathbf{A}_{\infty}^{\text{nu}}$ -对象 (定义 5.1.11).

例 5.2.6. (Segal CM-对象) 令 $\mathcal{C}$ 为具有有限积的范畴, 并令 $X: \mathbf{CM} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. X 的 Segal 条件是

$$X(\langle n \rangle, i) \simeq \varprojlim_{(\langle h \rangle, j) \in \mathbf{CM}_{(\langle n \rangle, i)}^{\text{初}}} X(\langle h \rangle, j).$$

我们还是来分析一下这个极限. 当 $i = 0$ 时, Segal 条件等价于

$$X(\langle n \rangle, 0) \simeq \prod_{j=1}^n X(\langle 1 \rangle, 0).$$

当 $i \neq 0$ 时, Segal 条件等价于

$$X(\langle n \rangle, i) \simeq \prod_{j=1}^{i-1} X(\langle 1 \rangle, 0) \times X(\langle 1 \rangle, 1) \times \prod_{j=i+1}^n X(\langle 1 \rangle, 0).$$

我们把 $X(\langle 1 \rangle, 0)$ 记为 A , 把 $X(\langle 1 \rangle, 1)$ 记为 M . 接下来看看惰性态射与活性态射各自在做什么:

- 令 $f: (\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle h \rangle, j)$ 为 **CM** 中的惰性态射.

- 若 $i = 0$, 按照 CM 的构造必有 $j = 0$. 此时 f 对应投影

$$A^n \rightarrow A^h$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_{f^{-1}(1)}, \dots, a_{f^{-1}(h)}).$$

- 若 $i \neq 0$ 而 $j = 0$, 那么 f 对应投影

$$A^{i-1} \times M \times A^{n-i} \rightarrow A^h$$

$$(a_1, \dots, m, \dots, a_n) \mapsto (a_{f^{-1}(1)}, \dots, a_{f^{-1}(h)}).$$

- 若 $i \neq 0$ 且 $j \neq 0$, 那么 f 对应投影

$$A^{i-1} \times M \times A^{n-i} \rightarrow A^{j-1} \times M \times A^{h-j}$$

$$(a_1, \dots, m, \dots, a_n) \mapsto (a_{f^{-1}(1)}, \dots, m, \dots, a_{f^{-1}(h)}).$$

- 令 $g: (\langle n \rangle, i) \rightarrow (\langle h \rangle, j)$ 为 CM 中的活性态射.

- 若 $i = 0$, 按照 CM 的构造仍有 $j = 0$. 此时对 $r \in \{1, \dots, h\}$ 记 $I_r := g^{-1}(r)$, 则 g 对应态射

$$A^n \rightarrow A^h$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \left(\prod_{s \in I_1} a_s, \dots, \prod_{s \in I_h} a_s \right).$$

- 若 $i \neq 0$, 由活性态射的描述可知 $j \neq 0$. 对 $r \in \{1, \dots, h\}$ 记 $I_r := g^{-1}(r)$, 则 g 对应态射

$$A^{i-1} \times M \times A^{n-i} \rightarrow A^{j-1} \times M \times A^{h-j}$$

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, m, a_{i+1}, \dots, a_n) \mapsto (b_1, \dots, b_h),$$

其中

$$b_r = \begin{cases} \prod_{s \in I_r} a_s, & r \neq j, \\ \left(\prod_{s \in I_j \setminus \{i\}} a_s \right) \cdot m, & r = j. \end{cases}$$

这刻画的正是“作用”.

例 5.2.7. (Segal LM-对象) 令 $\mathcal{C}$ 为具有有限积的范畴, 并令 $X: \mathbf{LM} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. X 的 Segal 条件是

$$X([n], i) \simeq \varprojlim_{([h], j) \in \mathbf{LM}_{([n], i)}^{\text{初}}} X([h], j).$$

我们再来分析这个极限. 考虑 $\mathbf{LM}$ 中的典范投影 $p: ([n], 0) \rightarrow ([0], 0)$, 它对应嵌入 $[0] \simeq \{n\} \hookrightarrow [n]$.

当 $i = 1$ 时, Segal 条件等价于

$$((e_i, 1)^*)_{i=1}^n : X([n], 1) \simeq \prod_{i=1}^n X([1], 1).$$

当 $i = 0$ 时, Segal 条件等价于

$$((e_i, 0)^*)_{i=1}^n \times p : X([n], 0) \rightarrow \left(\prod_{i=1}^n X([1], 1) \right) \times X([0], 0).$$

我们把 $X([1], 1)$ 记为 A , 把 $X([0], 0)$ 记为 M .

换句话说, $\mathcal{C}$ 中的 Segal $\mathbf{LM}$ -对象由单纯对象 $M_\bullet, A_\bullet : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 之间的自然变换 $M_\bullet \Rightarrow A_\bullet$ 构成, 其中 $A_\bullet$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 Segal $\mathbf{Assoc}$ -对象, 并且对所有 $n \geq 0$ 都有

$$M_n = A^n \times M.$$

现在来看惰性态射与活性态射怎样作用:

- $\{1\} \times \Delta^{\text{op}}$ 上的情形与 $\mathbf{Assoc}$ 完全一致.
- 对每个 $[n] \in \Delta$, 所诱导的态射 $([n], 0) \rightarrow ([n], 1)$ 对应投影

$$\begin{aligned} M_n &= A^n \times M \rightarrow A^n \\ (a_1, \dots, a_n, m) &\mapsto (a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

- 令 $f: ([n], 0) \rightarrow ([h], 0)$ 为 $\mathbf{LM}$ 中的惰性态射, 并把它在 $(T \rightarrow \text{id})$ 下的像记为 $\tilde{f}: [n+1] \rightarrow [h+1]$. 那么 f 对应投影

$$\begin{aligned} M_n &= A^n \times M \rightarrow A^h \times M = M_h \\ (a_1, \dots, a_n, m) &\mapsto (a_{\tilde{f}^{\text{op}}(1)}, \dots, a_{\tilde{f}^{\text{op}}(h)}, m). \end{aligned}$$

- 令 $g: ([n], 0) \rightarrow ([h], 0)$ 为 $\mathbf{LM}$ 中的活性态射, 把它在 $(T \rightarrow \text{id})$ 下的像记为 $\tilde{g}: [n+1] \rightarrow [h+1]$. 对 $j \in \{1, \dots, h+1\}$ 记

$$I_j := \{\tilde{g}^{\text{op}}(j-1) + 1, \dots, \tilde{g}^{\text{op}}(j)\}.$$

那么 g 对应态射

$$\begin{aligned} M_n &= A^n \times M \rightarrow A^h \times M = M_h \\ (a_1, \dots, a_n, m) &\mapsto \left(\prod_{s \in I_1} a_s, \dots, \prod_{s \in I_h} a_s, \left(\prod_{s \in I_{h+1} \setminus \{n+1\}} a_s \right) \cdot m \right). \end{aligned}$$

它刻画的正是“左作用”.

到这里, 代数模式已经把“对象由哪些初等分量拼成”这件事编码清楚了. 惰性态射把对象送向初等分量, Segal 条件则说原对象的取值可由这些分量上的取值作相应极限来复原. 当底模式是乘积模式时, 这个指标范畴等价于一个有限离散集, 相应极限才具体化为有限乘积. 于是, 即使有无穷多个高阶相容性要处理, 它们仍然可以由范畴内部的极限条件统一刻画.

不过, 代数对象不只有这种“怎样拆开”的资料. 真正的 n 元运算还要把 n 个输入合成为一个输出. 底模式中的活性态射规定这种合成的形状, 算畴中位于其上的态射才是抽象运算; 给定算畴的一个代数 A 后, 它们在对称幺半范畴中解释为

$$A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n) \longrightarrow A(y).$$

因此, 惰性态射与 Segal 条件负责分解资料 and 结构的可刻画性, 活性态射给出运算形状, 位于其上的算畴态射则记录真正的高阶代数运算. 把这几层资料及其相容性打包起来, 得到的正是算畴.

§ 5.3 代数模式上的算畴

这一节我们来正式定义算畴. 有了代数模式以后, 我们便可以用算畴描述一整套同伦相容的代数理论.

关于算畴的更多直观解释, 可以参考 [Cnossen, 2025b, 第 10 章] 中很精彩的综述.

代数模式 $\mathcal{P}$ 上的算畴 $\mathcal{O}$, 可以看成按 $\mathcal{P}$ 组织的颜色与运算所构成的范畴: $\mathcal{P}$ 的活性态射给出运算形状, 惰性态射与初等对象则控制相应的 Segal 分解.

定义 5.3.1. (算畴) 令 $\mathcal{P}$ 为代数模式. 一个 $\mathcal{P}$ -算畴是指满足下列条件的函子 $p: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$:

1. 对每个 $X \in \mathcal{O}$ 以及从 $p(X)$ 出发的惰性态射 $\alpha: p(X) \rightarrow P'$, 都存在从 X 出发、位于 α 之上的 p -推出提升.
2. 对 $P \in \mathcal{P}$, 记 $\mathcal{O}_P$ 为 P 上的纤维. 令 $X \in \mathcal{O}_P$. 如果 $\xi: (\mathcal{P}_{P'}^{\text{初}})^{\triangleleft} \rightarrow \mathcal{O}$ 是满足 $\xi(*) = X$ 的图表, 而且从锥点发出的态射都是 $\mathcal{P}$ 中相应惰性态射的 p -推出提升, 那么对 $Y \in \mathcal{O}_{P'}$, 交换方块

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(Y, X) & \longrightarrow & \varprojlim_{\alpha: P \rightarrow O \in \mathcal{P}_{P'}^{\text{初}}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(Y, \xi(\alpha)) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{P}}(P', P) & \longrightarrow & \varprojlim_{\alpha: P \rightarrow O \in \mathcal{P}_{P'}^{\text{初}}} \text{Hom}_{\mathcal{P}}(P', O) \end{array}$$

是拉回方块.

3. 函子 $\mathcal{O}_P \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{O} \in \mathcal{P}_P^{\text{初}}} \mathcal{O}_O$ 是等价.

这些条件使 $\mathcal{O}$ 继承代数模式结构: 位于 $\mathcal{P}$ 的惰性态射之上的 p -推出态射称为惰性态射, 映到 $\mathcal{P}$ 的活性态射的态射称为活性态射, 位于 $\mathcal{P}$ 的初等对象之上的对象称为初等对象. 我们用 $\text{Op}(\mathcal{P})$ 表示如下范畴: 对象是 $\mathcal{P}$ -算畴, 态射是 $\mathcal{P}$ 上保持位于惰性态射之上的推出态射的函子.

注记 5.3.2. 如果忘掉 $\mathcal{P}$ -算畴 $\mathcal{O}$ 继承的代数模式结构, 只保留总范畴及结构映射 p , 我们就把这个总范畴记为 $\mathcal{O}^{\otimes}$.

例 5.3.3. (算畴) Comm -算畴恰好就是 [Lurie, 2017, 定义 2.1.1.10] 意义下的算畴. 若无特别说明, 下文的“算畴”都指 Comm -算畴, 它们所构成的范畴记为 Op .

例 5.3.4. (广义算畴) 由注记 5.1.7, 我们也可以考虑 $\text{Fin}_*^{\mathbb{A}}$ -算畴, 它恰好就是 [Lurie, 2017, 定义 2.3.2.1] 意义下的广义算畴. 若无特别说明, 下文的“广义算畴”都指 $\text{Fin}_*^{\mathbb{A}}$ -算畴, 它们所构成的范畴记为 Op^{gen} .

注记 5.3.5. 考虑包含 $\text{Op} \subseteq \text{Op}^{\text{gen}}$. 由 [Lurie, 2017, 命题 2.1.4.6 及 注记 2.3.2.4] 与 [Lurie, 2009b, 命题 A.3.7.6], 不难发现 Op 与 Op^{gen} 都是可表现的. 而且 $\text{Op} \hookrightarrow \text{Op}^{\text{gen}}$ 保持极限. 所以它有左伴随

$$L_{\text{gen}}: \text{Op}^{\text{gen}} \rightarrow \text{Op}.$$

例 5.3.6. (平面算畴) Assoc -算畴就是 [Lurie, 2017, 定义 4.1.3.2] 意义下的平面算畴. 若无特别说明, 下文的“平面算畴”都指 Assoc -算畴, 它们所构成的范畴记为 Op^{ns} .

设 $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ 是代数模式之间保持分解系统与初等对象的函子, 并且所诱导的函子

$$\mathcal{O}_{X/}^{\text{el}} \rightarrow \mathcal{P}_{f(X)/}^{\text{初}}$$

是初始的. 也就是说, 对于 $F: \mathcal{P}_{f(X)/}^{\text{初}} \rightarrow \mathcal{C}$, 有 $\varprojlim F \simeq \varprojlim F \circ f$. 那么拉回给出函子

$$f^*: \text{Op}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Op}(\mathcal{O}).$$

在相当温和的假设下, 这个函子具有左伴随.

例 5.3.7. 定义函子 $\text{Cut}: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Fin}_*$, 它把 $[n]$ 送到 $\langle n \rangle$, 并把 Δ 中的态射 $\phi: [n] \rightarrow [m]$ 送到如下映射 $\text{Cut}(\phi): \langle m \rangle \rightarrow \langle n \rangle$:

$$\text{Cut}(\phi)(i) = \begin{cases} j, \phi(j-1) < i \leq \phi(j), \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$$

沿它拉回会给出函子 $\text{Op} \rightarrow \text{Op}^{\text{ns}}$, 粗略来说, 这个函子就是“忘掉对称群作用”. 它的左伴随则是一个“对称化”函子 $\text{Op}^{\text{ns}} \rightarrow \text{Op}$. 事实上, [Barkan et al., 2024, 定理 5.1.1] 证明了一个比较结果, 它给出了上述一类函子诱导等价的条件.

下面我们仔细看一看 Comm -算畴 $\mathcal{O}$ 的结构. 我们把带点有限集 $(\{0,1\}, 0)$ 上的纤维 $\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle} := p^{-1}(\langle 1 \rangle)$ 称为算畴 $\mathcal{O}$ 的颜色范畴. 它的群胚核记为

$$\mathcal{O}^{\simeq} := (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle})^{\simeq},$$

并称为 $\mathcal{O}$ 的颜色生象. 对于 $\langle n \rangle \in \text{Fin}_*$, 令 $I = \langle n \rangle^\circ$. 条件 3 给出等价

$$\mathcal{O}_{\langle n \rangle} \simeq \prod_{i \in I} \mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}.$$

因此 $\mathcal{O}_{\langle n \rangle}$ 的对象对应于一个颜色 n -元组 $(x_i)_{i \in I}$; 我们把它示意地记作 $\prod_{i \in I} x_i$, 也写成 I -标号的颜色族 $\{x_i\}_{i \in I}$, 但这里并不是断言 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 本身具有这些乘积.

再给定一个颜色 $y \in \mathcal{O}^{\simeq}$, 定义从 $\{x_i\}_{i \in I}$ 到 y 的 $\mathcal{O}$ 中多元态射的生象 (或运算的生象), 为 $\mathcal{O}^{\otimes}$ 中映到活性态射 $\langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ 的态射所构成的生象:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\{x_i\}_{i \in I}; y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(\{x_i\}_{i \in I}, y) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ * & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle). \end{array}$$

算畴 $\mathcal{O}$ 中的多元态射代表一个有多个输入的抽象运算. 给定 $\mathcal{O}$ 在对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的代数 A 后, 它对应形如 $A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n) \rightarrow A(y)$ 的态射.

本节最后, 我们再给出弱充实的概念.

定义 5.3.8. 令 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Assoc}$ 为平面算畴, 并令 $\mathcal{M}$ 为范畴. 如果存在 LM-算畴 $\mathcal{O}$, 使得 $\mathcal{O}_{\text{a}}^{\otimes} \simeq \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{O}_{\text{m}}^{\otimes} \simeq \mathcal{M}$, 就称 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 上弱充实.

§ 5.4 $\mathcal{O}$ -幺半范畴与 $\mathcal{O}$ -代数

这一节我们来讨论某个代数模式 $\mathcal{O}$ 所对应的 $\mathcal{O}$ -幺半范畴与 $\mathcal{O}$ -代数.

从前面的讨论可以看出, 乘积模式为研究代数对象提供了自然的框架.

定义 5.4.1. (乘积模式) 一个乘积模式是指代数模式 $\mathcal{O}$ 配上代数模式的态射 $|-|: \mathcal{O} \rightarrow \text{Comm}$, 使得对每个 $O \in \mathcal{O}$, 所诱导的函子

$$\mathcal{O}_{O/}^{\text{初}} \rightarrow \text{Comm}_{|O|/}^{\text{初}}$$

都是等价.

记注 5.4.2. 我们此前见过的所有例子都是乘积模式.

现在可以定义 $\mathcal{O}$ -幺半范畴以及其中的 $\mathcal{O}$ -代数了.

定义 5.4.3. 令 $\mathcal{O}$ 为乘积模式. 一个 $\mathcal{O}$ -幺半范畴, 是指推出纤维化 $p_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathcal{O}$, 使得与它对应的函子 $\mathcal{O} \rightarrow \text{Cat}$ 是一个 Segal $\mathcal{O}$ -对象.

注记 5.4.4. 沿 p_C 提升代数模式结构以后, 每个 $\mathcal{O}$ -幺半范畴都是一个 $\mathcal{O}$ -算畴.

定义 5.4.5. 令 $\mathcal{O}$ 为乘积模式, 并令 $\mathcal{V}^\otimes, \mathcal{W}^\otimes$ 为 $\mathcal{O}$ -幺半范畴. 它们之间的一个松 $\mathcal{O}$ -幺半函子, 是指交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^\otimes & \xrightarrow{F} & \mathcal{W}^\otimes \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{O} & \end{array}$$

其中 F 保持惰性态射. 等价地说, 松 $\mathcal{O}$ -幺半函子就是 $\mathcal{O}$ 上代数模式之间的态射.

如果函子 $\mathcal{V}^\otimes \rightarrow \mathcal{W}^\otimes$ 保持 $\mathcal{O}$ 上的所有推出态射, 就称它为 $\mathcal{O}$ -幺半函子.

例 5.4.6. 幺半范畴是指一个 Assoc-幺半范畴 $\mathcal{C}^\otimes$. $[0]$ 上的纤维等价于终范畴. 把其中唯一的对象沿唯一活性态射 $[0] \rightarrow [1]$ 作推出提升, 所得对象记为 1_C , 称为幺半结构的幺元. 同时把 $[1]$ 上的纤维记为 $\mathcal{C}$; 在这个语境下, $\mathcal{C}^\otimes$ 就称为 $\mathcal{C}$ 上的幺半结构. 由例 5.2.4, Assoc 中的活性态射 $[2] \rightarrow [1]$ 对应函子 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 我们称它为张量积函子.

例 5.4.7. 对称幺半范畴是指一个 Comm-幺半范畴 $\mathcal{C}^\otimes$. $\langle 0 \rangle$ 上的纤维等价于终范畴. 把其中唯一的对象沿唯一活性态射 $\langle 0 \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ 作推出提升, 所得对象记为 1_C , 称为幺半结构的幺元. 同时把 $\langle 1 \rangle$ 上的纤维记为 $\mathcal{C}$. 在这个语境下, $\mathcal{C}^\otimes$ 就称为 $\mathcal{C}$ 上的对称幺半结构. 由例 5.2.3, Comm 中的活性态射 $\langle 2 \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ 对应函子 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 我们仍称它为张量积函子.

令 $X: \mathbf{LM} \rightarrow \mathbf{Cat}$ 为一个 LM-幺半范畴. 利用 Grothendieck–Lurie 构造, 我们得到推出纤维化 $p: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{LM}$. 分别记 $\mathcal{O}_a$ 与 $\mathcal{O}_m$ 为 a 与 m 上的纤维. 由此可以读出以下结构:

- 纤维 $\mathcal{O}_a$ 是幺半范畴.
- 纤维 $\mathcal{O}_m$ 是 $\mathcal{O}_a$ 上的左模范畴. 也就是说, 存在一个在相差同伦的意义下良定义的作用函子 $\otimes: \mathcal{O}_a \times \mathcal{O}_m \rightarrow \mathcal{O}_m$.

定义 5.4.8. 令 $\mathcal{C}$ 为幺半范畴. 如果存在由推出纤维化 $p: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{LM}$ 给出的 Cat 中 Segal LM-对象, 并且满足

- $\mathcal{O}_a \simeq \mathcal{C}$;
- $\mathcal{O}_m \simeq \mathcal{M}$,

就称范畴 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ -线性的.

注记 5.4.9. 不难发现, 如果 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性, 那么 $\mathcal{M}$ 也在 $\mathcal{C}$ 上弱充实.

例 5.4.10. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, 都可以把 $\mathcal{C}$ 看成一个 $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^\circ$ -线性范畴 (上标 $\circ$ 表示由函子复合给出的幺半结构). 作用由下式给出:

$$(F, c) \mapsto F(c).$$

所需的高阶相容资料来自函子复合天然的结合性.

例 5.4.11. 对于任意一对范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$, 都可以把 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 看成么半范畴 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^\circ$ 上的右张量范畴. 这个作用由预复合给出:

$$\begin{aligned} \otimes: \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^\circ &\longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \\ (G, T) &\longmapsto G \circ T. \end{aligned}$$

所需的高阶相容资料同样来自函子复合天然的结合性.

现在我们来定义 $\mathcal{O}$ -么半范畴 $\mathcal{C}$ 中的代数对象.

定义 5.4.12. 令 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}'$ 为乘积模式, 令 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ 为 Comm 上的态射, 并令 $\mathcal{O}$ 为一个 $\mathcal{P}$ -算畴. 那么 $\mathcal{O}$ 中的一个 $\mathcal{O}$ -代数, 是指交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{A} & \mathcal{O} \\ & \searrow f & \swarrow \\ & \mathcal{P}' & \end{array}$$

使得 A 把 $\mathcal{P}$ 中的惰性态射送到 $\mathcal{O}$ 中的推出态射. 记 $\text{Alg}_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}(\mathcal{O})$ 为 $\text{Fun}_{/\mathcal{P}'}(\mathcal{P}, \mathcal{O})$ 中由 $\mathcal{P}$ -代数所张成的全子范畴. 如果 $f = \text{id}_{\mathcal{P}'}$, 就把范畴 $\text{Alg}_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}(\mathcal{O})$ 记为 $\text{Alg}_{/\mathcal{P}'}(\mathcal{O})$. 如果 $\mathcal{P}' = \text{Comm}$, 就在 $\text{Alg}_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}(\mathcal{O})$ 的记号中省略 $\mathcal{P}'$.

进一步, 如果 $\mathcal{O} = \mathcal{C}^\otimes$ 是一个 $\mathcal{P}'$ -么半范畴, 那么在 $\text{Alg}_{\mathcal{P}/\mathcal{P}'}(\mathcal{C}^\otimes)$ 中也省略记号 $\otimes$.

例 5.4.13. 令 $\mathcal{C}^\otimes$ 为对称么半范畴. 考虑把 $*$ 送到初等对象 $\langle 1 \rangle$ 的态射 $|-|: \text{Triv} \rightarrow \text{Comm}$. 那么 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的 Triv -代数, 无非就是 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^\otimes$ 中的一个对象.

现在取 $\mathcal{P} = \text{Comm}$, 我们来描述对称么半范畴 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{O}$ -代数究竟是什么.

定义 5.4.14. 令 $\mathcal{O}$ 为算畴. 那么

- $\mathcal{O}$ 中的 Comm -代数称为 $\mathcal{O}$ 中的交换代数, 并把 $\text{Alg}_{\text{Comm}}(\mathcal{O})$ 记为 $\text{CAlg}(\mathcal{O})$.
- $\mathcal{O}$ 中的 Assoc -代数称为 $\mathcal{O}$ 中的结合代数, 并把 $\text{Alg}_{\text{Assoc}}(\mathcal{O})$ 记为 $\text{Alg}(\mathcal{O})$.
- $\mathcal{O}$ 中的 CM -代数称为 $\mathcal{O}$ 中的交换代数上的模, 并把 $\text{Alg}_{\text{CM}}(\mathcal{O})$ 记为 $\text{Mod}(\mathcal{O})$.
- $\mathcal{O}$ 中的 LM -代数与 RM -代数分别称为 $\mathcal{O}$ 中的左模与右模, 并分别记为 $\text{LMod}(\mathcal{O})$ 与 $\text{RMod}(\mathcal{O})$.
- $\mathcal{O}$ 中的 BM -代数称为 $\mathcal{O}$ 中的双模, 并把 $\text{Alg}_{\text{BM}}(\mathcal{O})$ 记为 $\text{BMod}(\mathcal{O})$.

注记 5.4.15. 由注记 5.1.17, 我们也可以用 LM 定义 $\mathcal{O}$ 中的右模 (这时把 LM 记作 RM), 并用 $\text{RMod}(\mathcal{O}) := \text{Alg}_{\text{RM}}(\mathcal{O})$ 表示右模所构成的范畴.

定义 5.4.16. 令 $\mathcal{C}$ 为么半范畴, 并令 $q: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{LM}$ 给出 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的弱充实. 记 $\mathbf{LMod}(\mathcal{M})$ 为范畴 $\mathbf{Alg}_{/\mathbf{LM}}(\mathcal{O})$, 并称它为 $\mathcal{M}$ 的左模对象所构成的范畴. 如果 A 是 $\mathcal{C}$ 中的结合代数, 就把 $\mathbf{LMod}_A(\mathcal{M})$ 定义为拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{LMod}_A(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbf{LMod}(\mathcal{M}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\{A\}} & \mathbf{Alg}(\mathcal{C}). \end{array}$$

注记 5.4.17. 完全类似地, 可以把 $\mathbf{Mod}_A$ 、 $\mathbf{RMod}_A$ 与 ${}_B\mathbf{BMod}_A$ 定义为相应的拉回.

§ 5.5 无么 $\mathbb{A}_n$ -代数

由定义 5.1.11, 对每个 $1 \leq n \leq \infty$ 都有代数模式之间的态射

$$\mathbb{A}_n^{\text{nu}} \rightarrow \mathbb{A}_n,$$

而对于任意 (平面) 算畴 $\mathcal{O}$, 它会诱导全忠实嵌入

$$\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_n}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_n^{\text{nu}}}(\mathcal{O}).$$

因此只需先研究无么 $\mathbb{A}_n$ -代数的性质.

注意到我们有一列代数模式

$$\mathbb{A}_0^{\text{nu}} \rightarrow \mathbb{A}_1^{\text{nu}} \rightarrow \cdots.$$

记号 5.5.1. 令 $\mathcal{O}$ 为平面算畴. 对于 $0 \leq n \leq \infty$, 用 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_n}^{\text{nu}}(\mathcal{O})$ 表示无么 $\mathbb{A}_n$ -代数所构成的范畴.

例 5.5.2. 当 $n = 0$ 时, $\mathbb{A}_n^{\text{nu}} \simeq \emptyset$, 所以 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_0}^{\text{nu}}(\mathcal{O}) \simeq *$.

例 5.5.3. 当 $n = 1$ 时, $\mathbb{A}_n^{\text{nu}} \simeq \mathbf{Triv}$, 所以 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_1}^{\text{nu}}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_{[1]}$.

下面再给出 $\mathbb{A}_\infty^{\text{nu}}$ -模式的另一种描述.

定义 5.5.4. 范畴 $\Delta_{\text{inj}}^{\text{op}}$ 可以配上从 $\mathbf{Assoc}$ 继承的代数模式结构. 我们把它记为 $\mathbf{Assoc}^{\text{nu}}$, 并称为无么结合模式.

令 $\mathcal{O}$ 为平面算畴. $\mathcal{O}$ 中的 $\mathbf{Assoc}^{\text{nu}}$ -代数称为无么结合代数. 我们用 $\mathbf{Alg}^{\text{nu}}(\mathcal{O})$ 表示无么结合代数所构成的范畴.

命题 5.5.5. 令 $\mathcal{O}$ 为平面算畴, 那么态射 $q: \mathbb{A}_\infty^{\text{nu}} \hookrightarrow \mathbf{Assoc}^{\text{nu}}$ 诱导等价

$$\mathbf{Alg}^{\text{nu}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_\infty}^{\text{nu}}(\mathcal{O}) \simeq \varprojlim_n \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_n}^{\text{nu}}(\mathcal{O}).$$

证明. [Lurie, 2017, 命题 4.1.4.9]. 我们只需说明沿 q 的左 Kan 延拓诱导等价

$$q_! : \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_\infty}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{Alg}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{O}).$$

利用左 Kan 延拓的逐点公式与 Quillen 定理 A, 这又归结为证明范畴

$$(\Delta_{\mathrm{inj}})_{[0]/} \times_{\Delta_{\mathrm{inj}}} (\mathbb{A}_\infty^{\mathrm{nu}})^{\mathrm{op}}$$

是弱可缩的. $\square$

事实上, 若 $n \geq m + 2$, 那么幺半 $(m, 1)$ -范畴中的无幺 $\mathbb{A}_n$ -代数恰好就是无幺 $\mathbb{A}_\infty$ -代数.

定义 5.5.6. 如果映射生象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 对 $i > n - 1$ 都满足 $\pi_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$, 就称范畴 $\mathcal{C}$ 是一个 $(n, 1)$ -范畴.

定理 5.5.7. 令 $\mathcal{C}$ 为幺半范畴, 并假设 $\mathcal{C}$ 等价于某个 $(m, 1)$ -范畴, 其中 $m \geq 1$. 那么:

- 当 $n \geq m + 2$ 时, 遗忘函子 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_\infty}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_n}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C})$ 是等价.
- 遗忘函子 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_\infty}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{A}_{m+1}}^{\mathrm{nu}}(\mathcal{C})$ 是全忠实嵌入.

证明. [Lurie, 2017, 推论 4.1.6.17] $\square$

注记 5.5.8. 同样可以得到定理 5.5.7 的 $\mathbb{A}_n$ -版本.

§ 5.6 Boardman–Vogt 张量积

这一节我们来介绍算畴的 Boardman–Vogt 张量积. 它会给 $\mathbf{Op}$ 配上一个对称幺半结构. 这个张量积最早由 Boardman 与 Vogt 在 [Boardman and Vogt, 1973] 中明确写出.

构造 5.6.1. 我们在 $\mathbf{Fin}_*$ 上如下定义缩积函子:

$$\mu : \mathbf{Fin}_* \times \mathbf{Fin}_* \rightarrow \mathbf{Fin}_*, \quad (\langle m \rangle, \langle n \rangle) \mapsto \langle mn \rangle.$$

不难发现, 它是模式之间的态射

$$\mu : \mathbf{Fin}_*^{\natural} \times \mathbf{Fin}_*^{\natural} \rightarrow \mathbf{Fin}_*^{\natural}.$$

进一步, 把它看成态射 $\mathbf{Comm} \times \mathbf{Comm} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 时, 它给出同构

$$\mathbf{Comm}_{\langle n \rangle /}^{\mathrm{初}} \times \mathbf{Comm}_{\langle m \rangle /}^{\mathrm{初}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Comm}_{\langle mn \rangle /}^{\mathrm{初}}.$$

因此缩积会诱导伴随

$$\mathbf{Op}(\mathbf{Fin}_*^{\natural} \times \mathbf{Fin}_*^{\natural}) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu_!} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mu^*} \end{array} \quad \mathbf{Op}^{\mathrm{gen}}.$$

令 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{P}$ 为算畴, 并考虑乘积 $\mathcal{O} \times \mathcal{P}$. 注意到这个乘积并不是一个 $(\mathbf{Comm} \times \mathbf{Comm})$ -算畴, 而是一个 $(\mathbf{Fin}_*^{\mathbf{b}} \times \mathbf{Fin}_*^{\mathbf{b}})$ -算畴. 原因在于 $\mathbf{Comm} \times \mathbf{Comm}$ 的初等对象只有 $(\langle 1 \rangle, \langle 1 \rangle)$.

于是可以考虑 $\mu_!(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$, 它是一个广义算畴. 再作用注记 5.3.5 中的函子 L_{gen} , 就得到算畴 $L_{\text{gen}} \mu_!(\mathcal{O} \times \mathcal{P})$. 我们把它称为 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{P}$ 的 *Boardman–Vogt* 张量积. 下面再给出 Boardman–Vogt 张量积的另一种刻画.

定义 5.6.2. 令 $\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 为算畴. 算畴的一个双函子 $(\mathcal{O}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{Q}$, 是指交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Comm} \times \mathbf{Comm} & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Comm} \end{array}$$

使得 f 把一对惰性态射送到 $\mathcal{Q}$ 中的惰性态射. 我们用

$$\mathbf{BiFun}((\mathcal{O}, \mathcal{P}); \mathcal{Q}) \subseteq \mathbf{Fun}_{/\mathbf{Comm}}(\mathcal{O} \times \mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

表示由算畴的双函子所张成的全子范畴.

定义 5.6.3. (Boardman–Vogt 张量积) 如果对于每个算畴 $\mathcal{R}$, 与 f 预复合都诱导等价

$$f^*: \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{Q}, \mathcal{R}) \simeq \mathbf{BiFun}((\mathcal{O}, \mathcal{P}); \mathcal{R}),$$

就称 f 把 $\mathcal{Q}$ 展示为 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{P}$ 的一个 *Boardman–Vogt* 张量积. 此时把这个张量积记为 $\mathcal{O} \otimes_{\text{BV}} \mathcal{P}$.

粗略来说, $\mathcal{O} \otimes_{\text{BV}} \mathcal{P}$ 的颜色是 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{P}$ 的颜色所构成的二元组 (x, y) ; 它的多元态射则由两类多元态射“自由生成”: 一类是 $\varphi \otimes y: \{(x_i, y)\}_{i \in I} \rightarrow (z, y)$, 其中 $\varphi \in \mathcal{O}(\{x_i\}_{i \in I}; z)$; 另一类是 $x \otimes \psi: \{(x, y_j)\} \rightarrow (x, w)$, 其中 $\psi \in \mathcal{P}(\{y_j\}_{j \in J}; w)$. 所以不难发现有等价

$$L_{\text{gen}}(\mu_!(\mathcal{O} \times \mathcal{P})) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\text{BV}} \mathcal{P}.$$

定理 5.6.4. *Boardman–Vogt* 张量积给 $\mathbf{Op}$ 配上一个对称幺半结构, 并且它在每个变量上都保持余极限. $\mathbf{Op}^{\otimes_{\text{BV}}}$ 的幺元是 $\mathbf{Fin}_*^{\text{惰}}$.

证明. [Lurie, 2017, 命题 2.2.5.13] □

事实上, $\mathbf{Op}^{\otimes_{\text{BV}}}$ 是闭对称幺半范畴. 也就是说, 对算畴 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{P}$, 存在内 $\mathbf{Hom} \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{O}, \mathcal{P})$, 并且对每个算畴 $\mathcal{Q}$ 都有等价

$$\begin{aligned} \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{Q} \otimes_{\text{BV}} \mathcal{O}, \mathcal{P}) \\ \simeq \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{Q}, \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{O}, \mathcal{P})). \end{aligned}$$

进一步, 如果 $\mathcal{P} = \mathcal{C}^{\otimes}$ 是对称幺半范畴, 我们令

$$\mathcal{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fun}_{\mathbf{Op}}(\mathcal{O}, \mathcal{C}^{\otimes}).$$

于是得到等价

$$\mathcal{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})) \simeq \mathcal{Alg}_{\mathcal{P} \otimes_{\text{BV}} \mathcal{O}}(\mathcal{C}).$$

§ 5.7 Lurie–Dunn 可加性定理

定义 5.7.1. 固定整数 $k \geq 0$. 用 $\square^k = (-1, 1)^k$ 表示 k 维开立方体. 如果映射 $f: \square^k \rightarrow \square^k$ 可以写成

$$f(x_1, \dots, x_k) = (a_1 x_1 + b_1, \dots, a_k x_k + b_k),$$

其中 a_i, b_i 是实常数且 $a_i \geq 0$, 就称 f 是一个直线型嵌入. 更一般地, 令 S 为有限集. 如果映射 $\square^k \times S \rightarrow \square^k$ 是开嵌入, 而且它在 $\square^k \times S$ 的每个连通分支上的限制都是直线型的, 就称它为直线型嵌入. 记 $\text{Rect}(\square^k \times S, \square^k)$ 为所有从 $\square^k \times S$ 到 $\square^k$ 的直线型嵌入所构成的集合. 我们把 $\text{Rect}(\square^k \times S, \square^k)$ 看成 $(\mathbb{R}^{2k})^{|S|}$ 的一个开子集.

定义 5.7.2. 如下定义拓扑范畴 ${}^t\mathbb{E}_k^\otimes$:

1. ${}^t\mathbb{E}_k^\otimes$ 的对象是 Fin_* 中的对象 $\langle n \rangle$.
2. 给定一对对象 $\langle m \rangle, \langle n \rangle \in {}^t\mathbb{E}_k^\otimes$, ${}^t\mathbb{E}_k^\otimes$ 中从 $\langle m \rangle$ 到 $\langle n \rangle$ 的一个态射由以下资料构成:
 - Fin_* 中的一个态射 $\alpha: \langle m \rangle \rightarrow \langle n \rangle$.
 - 对每个 $j \in \langle n \rangle^\circ$, 一个直线型嵌入 $\square^k \times \alpha^{-1}(\{j\}) \rightarrow \square^k$.
3. 对每一对对象 $\langle m \rangle, \langle n \rangle \in {}^t\mathbb{E}_k^\otimes$, 通过下述表示给 $\text{Hom}_{{}^t\mathbb{E}_k^\otimes}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ 配上拓扑:

$$\text{Hom}_{{}^t\mathbb{E}_k^\otimes}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) = \coprod_{f: \langle m \rangle \rightarrow \langle n \rangle} \prod_{1 \leq j \leq n} \text{Rect}(\square^k \times f^{-1}(\{j\}), \square^k).$$

4. ${}^t\mathbb{E}_k^\otimes$ 中态射的复合按显然的方式定义.

用 $\mathbb{E}_k$ 表示 ${}^t\mathbb{E}_k^\otimes$ 的脉, 并称它为 $\mathbb{E}_k$ -算畴或小 k -立方算畴.

这里从拓扑范畴取脉, 只是给 $\mathbb{E}_k$ 选了一个方便计算的具体呈现. 后面的定义与比较只依赖所得算畴在 Op 中的等价类, 并不依赖某个模型范畴或某种严格化选择.

命题 5.7.3. $\mathbb{E}_k \rightarrow \text{Comm}$ 把 $\mathbb{E}_k$ 展示为一个算畴.

证明. [Lurie, 2017, 命题 5.1.0.3] □

注记 5.7.4. 我们有一列算畴

$$\mathbb{E}_0 \rightarrow \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2 \rightarrow \dots$$

不难发现, 这个图表的余极限恰好是 Comm . 因此我们也用 $\mathbb{E}_\infty$ 表示 Comm .

事实上, 在高阶代数的意义下, $\mathbb{E}_1$ 等价于 Assoc .

注记 5.7.5. 考虑例 5.3.7 中定义的函子 Cut . 我们可以把 Assoc 看成一个算畴. 事实上, Op 中有等价 $\text{Cut}(\text{Assoc}) \simeq \mathbb{E}_1$.

定理 5.7.6. (Lurie–Dunn 可加性定理) *Boardman–Vogt* 张量积 $\mathbb{E}_n \otimes \mathbb{E}_m$ 就是算畴 $\mathbb{E}_{n+m}$.

证明. [Lurie, 2017, 定理 5.1.2.2] □

现在我们来讨论代数模式 $\mathbf{E}_k$ (定义 5.1.12) 与算畴 $\mathbb{E}_k$ 之间的关系.

注记 5.7.7. 因为在 $\mathbf{AlgPatt}$ 中有 $\mathbf{E}_k \simeq \mathbf{Assoc}^{\times k}$, 广义算畴 $\mathbf{Cut}(\mathbf{Assoc})^{\times k}$ 与 $\mathbf{E}_k$ 编码相同的资料. 利用 $\mathbf{Fin}_*$ 的 k 重缩积 $\mu^k: \mathbf{Fin}_*^{\times k} \rightarrow \mathbf{Fin}_*$ 以及注记 5.3.5, 可以得到算畴 $\mathbf{L}_{\text{gen}}(\mu_!^k \mathbf{Cut}(\mathbf{Assoc})^k)$. 由定理 5.7.6, 在 $\mathbf{Op}$ 中有等价

$$\mathbf{L}_{\text{gen}}(\mu_!^k \mathbf{Cut}(\mathbf{Assoc})^k) \simeq \mathbb{E}_k.$$

因此 $\mathbf{E}_k$ 与 $\mathbb{E}_k$ 编码的是相同资料.

Eckmann–Hilton 论证告诉我们, 一个集合 (更一般地, 一个 1-范畴中的对象) 如果配有两个彼此相容的结合乘法, 那么它无非就是 Segal $\mathbf{Comm}$ -对象. 对于一般范畴 $\mathcal{C}$, 上面的论证则说明 $\mathbb{E}_n$ -代数就是配有 n 个彼此相容的结合乘法的对象. 于是, 在结合代数与交换代数之间出现了一整条无穷层级的代数结构. 考虑 $(m, 1)$ -范畴以后, 我们还能在这些情形之间作出插值.

推论 5.7.8. 如果 $\mathcal{C}$ 是对称幺半 $(m, 1)$ -范畴, 那么只要 $k \geq m + 1$, 就有

$$\mathbf{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{CAlg}(\mathcal{C}).$$

证明的关键想法是: 随着 k 增大, 算畴 $\mathbb{E}_k$ 中的生象会变得越来越连通; 当我们把它们映入 $\mathcal{C}$ 的截断映射生象时, 最终就再也无法把它们与点区分开来.

由注记 5.7.7, 我们还得到可加性的另一个意外地好用的推论:

推论 5.7.9. 要定义一个对称幺半 (∞, n) -范畴, 只需对每个 k 定义 (∞, n) -范畴中的一列彼此相容的 Segal $\mathbf{E}_k$ -对象.

例如, 这对于构造配边 (∞, n) -范畴上的对称幺半结构很有用. 如果没有注记 5.7.7, 并不容易看出这些资料为什么应当 “收敛” 到一个对称幺半结构.

§ 5.8 几种对称幺半结构

这一节我们来定义并研究几种对称幺半范畴.

5.8.1 乘积对称幺半结构

定义 5.8.1. 如果 $\mathcal{C}$ 上的对称幺半结构 $\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 满足以下条件, 就称它是乘积型的:

1. 幺元对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 是终对象.

2. 对于对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 态射

$$X \xleftarrow{\sim} X \otimes 1_{\mathcal{C}} \leftarrow X \otimes Y \rightarrow 1_{\mathcal{C}} \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y$$

把 $X \otimes Y$ 展示为 X 与 Y 在 $\mathcal{C}$ 中的积.

定理 5.8.2. 函子 $\mathcal{C}^{\otimes} \mapsto \mathcal{C}$ 在以下两个范畴之间给出等价:

- (小) 乘积对称幺半范畴以及它们之间的对称幺半函子所构成的范畴.
- 具有有限积的范畴以及它们之间保持有限积的函子所构成的范畴.

证明. [Lurie, 2017, 推论 2.4.1.9] □

特别地, 如果范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限积, 那么它上面存在本质唯一的乘积对称幺半结构, 记为 $\mathcal{C}^{\times} \rightarrow \mathbf{Comm}$. 当然, 使用这个记号时还需要给定一个识别 $\mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^{\times} \simeq \mathcal{C}$.

现在考虑范畴所构成的范畴 $\mathbf{Cat}$. 由范畴论的公理化设置 ([Cnossen, 2025b, § 1.3.1, 公理 B.3]), $\mathbf{Cat}$ 具有有限积. 所以可以给 $\mathbf{Cat}$ 配上乘积对称幺半结构 $\mathbf{Cat}^{\times}$.

不难发现, 对于乘积模式 $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ -幺半范畴无非就是 $\mathbf{Cat}^{\times}$ 中的一个 $\mathcal{O}$ -对象.

5.8.2 Lurie 张量积

这一节我们来介绍 $\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$ (更一般地, 余完备范畴) 上的一个对称幺半结构. 这个结构来自 [Lurie, 2017, § 4.8.1], 而且本节的结论基本都归功于 Lurie. 因此这个对称幺半结构也称为 *Lurie 张量积*.

令 $\widehat{\mathbf{Cat}}$ 表示由大范畴组成的 (非常大的) 范畴. 我们可以给 $\widehat{\mathbf{Cat}}$ 配上乘积对称幺半结构.

定义-命题 5.8.3. 考虑全子范畴

$$\left(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}\right)^{\otimes} \subseteq \left(\widehat{\mathbf{Cat}}\right)^{\times},$$

定义如下:

- 对象 $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$ 属于 $\left(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}\right)^{\otimes}$, 当且仅当每个 $\mathcal{C}_i$ 都是可表现范畴.
- 设态射 $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n) \rightarrow (\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m)$ 位于 $\alpha: \langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$ 之上. 它属于 $\left(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}\right)^{\otimes}$, 当且仅当对于每个 $j \in \langle m \rangle^{\circ}$, 相应的函子

$$\prod_{i \in \alpha^{-1}(j)} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_j$$

在每个变量上都保持余极限.

那么 $(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 给出 $\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$ 上的对称么半结构. 我们把乘法函子

$$- \otimes -: \mathbf{Pr}^{\mathbf{L}} \times \mathbf{Pr}^{\mathbf{L}} \rightarrow \mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$$

称为 *Lurie* 张量积.

Lurie 张量积与模的张量积之间有如下类比:

$(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes}$	线性代数
可表现范畴 $\mathcal{C}$	模 M
保持余极限的函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$	线性映射 $M \rightarrow N$
在每个变量上分别保持余极限的 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$	双线性映射 $M \times N \rightarrow P$
Lurie 张量积	模的张量积

接下来我们仔细解释这个类比.

记号 5.8.4. 对于可表现范畴 $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{E}$, 记 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{Bil}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \subseteq \mathbf{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E})$ 为函子范畴中由那些在每个变量上都保持余极限的函子所张成的全子范畴.

现在可以把 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 的 Lurie 张量积理解为一个可表现范畴 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$, 配上函子

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{D},$$

这个函子在每个变量上分别保持余极限, 而且对于每个可表现范畴 $\mathcal{E}$, 预复合都诱导等价

$$\mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fun}^{\mathbf{Bil}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}).$$

直接来看也有

$$\mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fun}^{\mathbf{Bil}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathcal{C}, \mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})),$$

所以 Lurie 张量积把 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}$ 展示为相应的内 Hom.

由于 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathbf{Ani}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$, 可知 $\mathbf{Ani}$ 是 $(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes}$ 的么元对象.

接下来我们讨论 Lurie 张量积的一些性质.

命题 5.8.5. 对于小范畴 $\mathcal{C}_0$ 与 $\mathcal{D}_0$, 有

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0) \simeq \mathbf{PSh}(\mathcal{C}_0) \otimes \mathbf{PSh}(\mathcal{D}_0).$$

证明. 我们用 Lurie 张量积的泛性质来证明这个等价. 对任意范畴 $\mathcal{E}$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{Fun}^{\mathbf{Bil}}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}_0) \times \mathbf{PSh}(\mathcal{D}_0), \mathcal{E}) \\ & \simeq \mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}_0), \mathbf{Fun}^{\mathbf{L}}(\mathbf{PSh}(\mathcal{D}_0), \mathcal{E})). \end{aligned}$$

因为对于任意范畴 $\mathcal{C}$, $\text{PSh}(\mathcal{C})$ 都可以看成由 $\mathcal{C}$ 自由生成的余完备范畴, 所以

$$\begin{aligned} \text{Fun}^{\text{L}}(\text{PSh}(\mathcal{C}_0), \text{Fun}^{\text{L}}(\text{PSh}(\mathcal{D}_0), \mathcal{E})) \\ \simeq \text{Fun}(\mathcal{C}_0, \text{Fun}(\mathcal{D}_0, \mathcal{E})) \\ \simeq \text{Fun}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0, \mathcal{E}) \\ \simeq \text{Fun}^{\text{L}}(\text{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0), \mathcal{E}). \end{aligned}$$

□

为了得到更多性质, 我们先考虑下面这个概念:

定义 5.8.6. 令 $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \perp \\ \xleftarrow{R} \end{array} \mathcal{D}$ 为伴随.

- 如果 R 全忠实, 就称 L 是左 *Bousfield* 局部化.
- 如果 L 全忠实, 就称 R 是右 *Bousfield* 局部化.

下面的命题说明 Bousfield 局部化的确是一种范畴局部化.

命题 5.8.7. 令 $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为左 *Bousfield* 局部化, 并令 $W \subseteq \text{Ar}(\mathcal{C})$ 为一族被 L 送到等价的态射. 那么对于任意范畴 $\mathcal{E}$, 预复合诱导范畴等价

$$\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fun}^{W\text{-loc}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}),$$

其中 $\text{Fun}^{W\text{-loc}}$ 表示由那些把 W 送到等价的函子所张成的全子范畴. 这个等价还限制为等价

$$\text{Fun}^{\text{colim}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fun}^{W\text{-loc}, \text{colim}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

证明. [Lurie, 2009b, 命题 5.2.7.12]

□

现在来说明 Lurie 张量积与 Bousfield 局部化相容.

命题 5.8.8. 给定左 *Bousfield* 局部化 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, 其中 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ 是由某族态射 $W_{\mathcal{C}}$ 的局部对象所构成的全子范畴; 类似地给定 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$. 那么

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}'$$

也是左 *Bousfield* 局部化. 更具体地说, 只要 κ 足够大, 使 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 都是 κ -紧生成的, 那么 $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}'$ 就是关于 $W_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{D}^{\kappa} \cup \mathcal{C}^{\kappa} \otimes W_{\mathcal{D}}$ 局部的对象所构成的全子范畴.

证明. 由命题 5.8.7, 有

$$\text{Fun}^{\text{L}}(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}', \mathcal{E}) \simeq \text{Fun}^{\text{L}}(\mathcal{C}', \text{Fun}^{\text{L}}(\mathcal{D}', \mathcal{E})) \simeq \text{Fun}^{W_{\mathcal{C}}\text{-loc}, \text{L}}(\mathcal{C}, \text{Fun}^{W_{\mathcal{D}}\text{-loc}, \text{L}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})).$$

把函子去咖喱化以后, 不难发现 $\text{Fun}^{W_{\mathcal{C}}\text{-loc}}(\mathcal{C}, \text{Fun}^{W_{\mathcal{D}}\text{-loc}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$ 中的函子 F , 可以视为函子 $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, 并且它把 $W_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{D}^{\kappa}$ 与 $W_{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{C}^{\kappa}$ 都送到等价. 令 $W_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}}$ 表示 $W_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{D}^{\kappa} \cup W_{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{C}^{\kappa}$, 则

$$\text{Fun}^{W_{\mathcal{C}}\text{-loc}}(\mathcal{C}, \text{Fun}^{W_{\mathcal{D}}\text{-loc}, \text{L}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})) \simeq \text{Fun}^{W_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}}\text{-loc}, \text{Bil}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}).$$

于是由泛性质得到结论. $\square$

因为每个可表现范畴都可以写成某个 $\text{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 的 Bousfield 局部化, 上面两个例子合在一起便给出了张量积的一般存在性. 事实上, 还有一个更实用的公式.

命题 5.8.9. 对于可表现范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$, 有

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \simeq \text{Fun}^{\text{lim}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D}).$$

证明. 把 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 分别写成 $\text{PSh}(\mathcal{C}_0)$ 与 $\text{PSh}(\mathcal{D}_0)$ 关于某些生成等价的左 Bousfield 局部化, 则有

$$\begin{aligned} \text{Fun}^{\text{lim}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D}) &\subseteq \text{Fun}^{\text{lim}}(\text{Fun}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ani})^{\text{op}}, \mathcal{D}) \\ &= \text{Fun}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \mathcal{D}) \\ &\subseteq \text{Fun}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Fun}(\mathcal{D}_0^{\text{op}}, \text{Ani})) \\ &= \text{Fun}((\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0)^{\text{op}}, \text{Ani}) = \text{PSh}(\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0). \end{aligned}$$

这里的两个包含都由相应的局部性条件刻画.

把这些条件一路追到最右端, 就会看到 $\text{Fun}^{\text{R}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D})$ 恰好等于 $\text{Fun}((\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0)^{\text{op}}, \text{Ani})$ 中由局部对象所张成的全子范畴, 也就是相应的左 Bousfield 局部化. $\square$

利用这个公式, 可以得到下面的结果.

命题 5.8.10. 令 Ani_* 为带点生象所构成的范畴. 对于每个可表现范畴 $\mathcal{C}$, 都有

$$\text{Ani}_* \otimes \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_*.$$

证明. 可以把 Ani_* 看成 $\text{Ar}(\text{Ani})$ 的 Bousfield 局部化, 它是 $\text{Ar}(\text{Ani})$ 中由起点为 $*$ 的所有箭头所构成的全子范畴 (左伴随把 $A \rightarrow X$ 送到 X/A). 这把 $\text{Fun}^{\text{lim}}((\text{Ani}_*)^{\text{op}}, \mathcal{C})$ 展示为 $\text{Fun}([1], \mathcal{C})$ 中由某个局部性条件刻画的全子范畴. 把条件展开以后, 得到的恰好就是起点为 $*$ 的箭头所构成的全子范畴. $\square$

利用命题 5.8.10, 可以说明 Sp 是 $(\text{Pr}^{\text{L}})^{\otimes}$ 中的交换代数.

命题 5.8.11. • 典范函子 $\Sigma^{\infty}[-]: \text{Ani} \rightarrow \text{Sp}$ 诱导等价 $\text{Sp} \otimes \text{Sp} \xrightarrow{\sim} \text{Sp}$. 它的逆使 Sp 成为 $(\text{Pr}^{\text{L}})^{\otimes}$ 中的交换代数.

- 可表现范畴 $\mathcal{C}$ 是稳定的, 当且仅当典范函子

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sp} \otimes \mathcal{C}$$

是等价. 这个等价使 $\mathcal{C}$ 成为 $(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes}$ 中交换代数 $\mathbf{Sp}$ 上的模.

证明. 因为 $\mathbf{Ani}$ 是可表现的, 可以把 $\mathbf{Sp}$ 看成 $\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$ 中的余极限

$$\mathbf{Sp} \simeq \varinjlim \left(\mathbf{Ani}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Ani}_* \xrightarrow{\Sigma} \dots \right).$$

现在把 $\mathbf{Sp}$ 与 $\mathcal{C}$ 作张量, 得到

$$\mathbf{Sp} \otimes \mathcal{C} \simeq \varinjlim \left(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \dots \right),$$

这正是 $\mathcal{C}_*$ 的稳定化 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_*)$. 因此 $\mathcal{C} \otimes \mathbf{Sp}$ 等价于 $\mathcal{C}$, 等价于说 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$, 也就等价于 $\mathcal{C}$ 是稳定的.

现在用 $p: (\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 表示把 $(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes}$ 展示为对称幺半范畴的推出纤维化. 考虑函子

$$\mathbf{Sp}^{\otimes -}: \mathbf{Comm} \rightarrow (\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes},$$

它把 $\langle 1 \rangle$ 送到 $\mathbf{Sp}$, 把 $\langle n \rangle$ 送到 $\mathbf{Sp}^{\otimes n}$, 并把惰性态射 $\langle n \rangle \rightarrow \langle m \rangle$ 送到等价 $\mathbf{Sp}^{\otimes n} \simeq \mathbf{Sp}^{\otimes m}$. 由 p -推出态射的泛性质, 这些等价典范地给出 p -推出态射. 因而由定义 5.4.12, $\mathbf{Sp}^{\otimes -}$ 是 $(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})^{\otimes}$ 中的交换代数. $\square$

5.8.3 谱的张量积

现在我们来构造 $\mathbf{Sp}$ 上的对称幺半结构.

定义 5.8.12. 令 $\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 为对称幺半范畴. 如果交换代数 $A \in \mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$ 的乘法 $A \otimes A \rightarrow A$ 是等价, 就称 A 是幂等的. 用 $\mathbf{CAlg}^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中由幂等交换代数所张成的全子范畴.

由命题 5.8.11, $\mathbf{Sp}$ 是 $\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$ 中的幂等交换代数.

记号 5.8.13. 用 $\mathbf{Pr}_{\mathrm{st}}^{\mathbf{L}}$ 表示 $\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}}$ 中由稳定可表现范畴所张成的全子范畴.

命题 5.8.14. 令 $\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Comm}$ 为对称幺半范畴, 并令 $A \in \mathbf{CAlg}^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C})$ 为幂等交换代数. 令 $L = - \otimes A: \mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathcal{C}^{\otimes}$ 为相应的局部化函子, 于是 $LC^{\otimes}$ 继承对称幺半结构. 那么遗忘函子 $G: \mathbf{Mod}_A(\mathcal{C})^{\otimes} \rightarrow \mathcal{C}^{\otimes}$ 确定等价

$$\mathbf{Mod}_A(\mathcal{C})^{\otimes} \simeq (LC)^{\otimes}.$$

证明. [Lurie, 2017, 命题 4.8.2.10] $\square$

现在专门取 $\mathcal{C} = (\mathbf{Pr}^L)^{\otimes}$. 由命题 5.8.14, 我们在 $\mathbf{Pr}_{\text{st}}^L$ 上得到一个以 $\mathbf{Sp}$ 为幺元的对称幺半结构.

因而 $\mathbf{Sp}$ 上也有一个对称幺半结构, 它由以下性质唯一刻画:

1. 双函子 $\otimes: \mathbf{Sp} \times \mathbf{Sp} \rightarrow \mathbf{Sp}$ 在每个变量上分别保持小余极限.
2. $\mathbf{Sp}^{\otimes}$ 的幺元对象是球谱 $\mathbb{S}$.

我们把 $\mathbf{Sp}$ 上的这个对称幺半结构称为谱的张量积或谱的缩积.

注记 5.8.15. 也可以用 Day 卷积构造 $\mathbf{Sp}$ 的张量积.

本章至此准备好了后文所需的两类背景: 一方面, 代数模式与算畴告诉我们怎样在幺半范畴中谈代数和模; 另一方面, Lurie 张量积与谱的张量积给出了交换环谱及其模范畴的环境. 下一章的单子并不是另一种算畴, 而是自函子复合幺半范畴中的代数对象. 这一区分很重要: 前者编码“有哪些多元运算”, 后者则用一个伴随所诱导的自函子来重建范畴, 并最终进入下降理论.

第6章

Lawvere 理论、生象化与筛余完备化

经典代数结构往往早已由有限生成自由对象之间的态射完全编码：自由对象记录输入，态射记录运算，态射的复合则记录这些运算满足的恒等式。Lawvere 理论把这个观察抽象出来，而筛余完备化说明如何从自由对象重建全部代数对象。本章先用群把这件事算一遍，再抽取一般的筛余完备化与紧投射生成机制，最后把集合值代数换成生象值代数，得到生象化、生象函子以及生象环和模。整条路线只使用 Yoneda 嵌入、余极限和泛性质；需要计算时可以另选单纯对象等模型，但定义与结论不依赖这种选择。

§ 6.1 例子：群由有限生成自由群控制

先看最熟悉的普通群 1-范畴，本章仍把它记作 $\mathbf{Grp}$ 。记 $\mathbf{FinFreeGrp} \subseteq \mathbf{Grp}$ 为有限生成自由群所成的全子范畴，并把秩为 n 的自由群记作 F_n 。这个范畴带有限余积，而且

$$F_m \sqcup F_n \simeq F_{m+n}.$$

现在取一个把有限余积变成有限乘积的反变函子

$$\underline{G}: \mathbf{FinFreeGrp}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

如果记 $G := \underline{G}(F_1)$ ，那么

$$\underline{G}(F_n) \simeq G^n.$$

所以这个函子在对象上的取值，已经全部由一个集合 G 决定了。

真正有意思的是态射。设 a, b 是 F_2 的两个自由生成元。把 F_1 的生成元送到单词 ab ，得到一个群同态

$$m: F_1 \longrightarrow F_2.$$

反变性把它变成映射

$$\underline{G}(m): G \times G \simeq \underline{G}(F_2) \longrightarrow \underline{G}(F_1) \simeq G,$$

这就是 G 上的乘法. 类似地, 把生成元送到 a^{-1} 或单位元, 便分别恢复出逆运算与单位元; 自由群之间态射的复合则记录了群公理. 因此

$$\mathrm{Fun}^{\Pi}(\mathrm{FinFreeGrp}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) \simeq \mathrm{Grp},$$

其中上标 Π 表示函子保持有限乘积.

这个例子并不是群所独有的巧合. 集合、Abel 群、交换环、 R -模以及域上的 Lie 代数等经典代数范畴, 都可以用相应的有限生成自由对象作类似描述. 它提示我们把两类资料分开看: 自由对象之间的态射编码代数运算, 态射的复合则编码这些运算满足的恒等式. 下面要做的, 是找出从有限自由对象恢复整个代数范畴所需的余极限.

定义 6.1.1. (Lawvere 理论) 一个单色 **Lawvere 理论** 是如下资料: 一个带有限乘积的本质小 1-范畴 $\mathbb{T}$, 以及一个指定对象 $t \in \mathbb{T}$, 使得 $\mathbb{T}$ 的每个对象都同构于某个有限幂 $t^{\times n}$. 这里允许 $n = 0$, 此时 $t^{\times 0}$ 是终对象.

若 $\mathcal{D}$ 带有限乘积, 则 $\mathcal{D}$ 中的 $\mathbb{T}$ -代数是保持有限乘积的函子 $A: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{D}$. 它们所成的范畴记作 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D}) := \mathrm{Fun}^{\Pi}(\mathbb{T}, \mathcal{D})$.

这里“由 t 的有限幂生成”是定义的关键部分; 仅仅要求 $\mathbb{T}$ 带有限乘积, 并不足以使它成为单色 Lawvere 理论. 对群而言, $\mathbb{T} = \mathrm{FinFreeGrp}^{\mathrm{op}}$, 指定对象是 F_1 , 而 F_n 在反范畴中正是 $F_1^{\times n}$. 因此上面的等价可以重写为 $\mathrm{Grp} \simeq \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}(\mathrm{Set})$.

注记 6.1.2. (多色版本) 单色定义要求所有对象都由同一个 t 的有限幂给出. 本章更常使用它的多色版本: 若 $\mathcal{C}$ 是带有限余积的本质小 1-范畴, 则 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 扮演多色 Lawvere 理论; $\mathcal{C}$ 的各个对象充当不同的“色”, 而有限余积在反范畴中变成有限乘积. 因此它在 $\mathcal{D}$ 中的代数就是保持有限乘积的函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{D}$. 这一说法比强行选定单一生成对象更适合后文的紧投射生成范畴.

§ 6.2 一般机制: 筛余完备化

预层范畴可以看成给一个小范畴自由添入所有小余极限的结果; Ind-完备化则只自由添入滤余极限. 现在我们遇到的是保持有限乘积的预层, 于是自然要问: 它对应于自由添入哪一类余极限?

定义 6.2.1. (筛范畴) 一个非空范畴 I 称为**筛范畴**, 如果对角函子

$$\Delta: I \longrightarrow I \times I$$

是终结的 (也常称为共尾的). 以筛范畴为指标的余极限称为 **筛余极限**.

这个定义看起来有点绕, 但它恰好把我们需要的交换律包装了起来: 在 $\mathbf{Set}$ 或 $\mathbf{Ani}$ 中, 筛余极限与有限乘积交换. 例如, 若 $X, Y: I \rightarrow \mathbf{Ani}$ 且 I 是筛的, 那么

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{i \in I} (X_i \times Y_i) &\simeq \operatorname{colim}_{(i,j) \in I \times I} (X_i \times Y_j) \\ &\simeq \left(\operatorname{colim}_{i \in I} X_i \right) \times \left(\operatorname{colim}_{j \in I} Y_j \right). \end{aligned}$$

第一步正是对角函子的终结性. 反过来, 这一交换性质也刻画了筛范畴.

定义 6.2.2. (筛余完备化) 设 $\mathcal{C}$ 是带有限余积的小范畴. 它的**筛余完备化** $\mathbf{sInd}(\mathcal{C})$ 是预层范畴 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) = \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$ 中包含全体可表预层且关于筛余极限封闭的最小全子范畴.

如果 $\mathcal{C}$ 是 1-范畴而且只考虑集合值预层, 相应的构造记作 $\mathbf{1-sInd}(\mathcal{C})$.

设 $X \simeq \operatorname{colim}_{i \in I} y(X_i)$ 是可表预层的筛余极限. 对于 $A, B \in \mathcal{C}$, 我们有

$$\begin{aligned} X(A \sqcup B) &\simeq \operatorname{colim}_{i \in I} \operatorname{Map}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, X_i) \\ &\simeq \operatorname{colim}_{i \in I} (\operatorname{Map}_{\mathcal{C}}(A, X_i) \times \operatorname{Map}_{\mathcal{C}}(B, X_i)) \\ &\simeq X(A) \times X(B). \end{aligned}$$

注意第一行左边是 $X(A \sqcup B)$, 而不是 $X(A \times B)$: 我们是在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中把有限余积读成有限乘积.

因此 $\mathbf{sInd}(\mathcal{C})$ 中的对象都是保持有限乘积的预层. 更强的是, 在这里的小性假设下有等价

$$\mathbf{sInd}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Fun}^{\Pi}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani}), \quad (6.1)$$

而在 1-范畴中则有

$$\mathbf{1-sInd}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{Fun}^{\Pi}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}).$$

命题 6.2.3. (筛余完备化的泛性质) 设 $\mathcal{C}$ 带有限余积, $\mathcal{D}$ 带筛余极限. 沿 *Yoneda* 嵌入作限制给出等价

$$\mathbf{Fun}^{\mathrm{sift}}(\mathbf{sInd}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \simeq \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

其中左边表示保持筛余极限的函子.

也就是说, 任意 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 都有本质唯一的筛余连续延拓

$$\tilde{f}: \mathbf{sInd}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}.$$

把 $\mathcal{C} = \mathbf{FinFreeGrp}$ 代入, 就得到一个很具体的结论: 群的 1-范畴正是从有限生成自由群出发, 在 1-范畴意义下自由添入筛余极限得到的范畴.

6.2.1 滤余极限还不够

滤范畴都是筛范畴, 所以在预层范畴中有包含关系

$$\mathcal{C} \subseteq \text{Ind}(\mathcal{C}) \subseteq \text{sInd}(\mathcal{C}) \subseteq \text{PSh}(\mathcal{C}).$$

筛余完备化通常比 Ind-完备化更大, 而不是它的子范畴. 多出来的那一步可以说得很具体:

- 在 1-范畴中, 保持筛余极限等价于同时保持滤余极限与反射余等子;
- 在 ∞ -范畴中, 保持筛余极限等价于同时保持滤余极限与单纯对象的几何实现.

所以在“由这两类余极限生成”的意义下, 可以把这两句话记成

$$\text{筛余极限} = \text{滤余极限} + \text{几何实现},$$

其中 1-截断后的“几何实现”就是反射余等子.

具体地说, 一对平行箭头 $f, g: A \rightrightarrows B$ 称为**反射对**, 如果存在 $s: B \rightarrow A$ 使得 $f \circ s = g \circ s = \text{id}_B$. 它的余等子称为**反射余等子**. 因而在普通范畴中, 可以先做 $\text{Ind}(\mathcal{C})$, 再关于反射余等子封闭; 得到的正是 $1\text{-sInd}(\mathcal{C})$.

§ 6.3 识别准则: 紧投射生成

筛余完备化中的可表对象有一个重要性质: 从它们出发的映射函子保持筛余极限. 这提示我们反过来识别哪些范畴来自筛余完备化.

定义 6.3.1. 设 $\mathcal{D}$ 带筛余极限. 对象 $P \in \mathcal{D}$ 称为**紧投射对象**, 如果

$$\text{Map}_{\mathcal{D}}(P, -): \mathcal{D} \rightarrow \text{Ani}$$

保持筛余极限. 记这些对象所成的全子范畴为 $\mathcal{D}^{\text{cp}}$.

把上一节的分解代入定义就能看出, “紧”负责滤余极限, “投射”负责几何实现. 在普通范畴里, 后一个条件等价于保持反射余等子.

定义 6.3.2. (紧投射生成与代数范畴) 设 $\mathcal{D}$ 具有全体小筛余极限, 且 $\mathcal{D}^{\text{cp}}$ 本质小. 称 $\mathcal{D}$ 是**紧投射生成的**, 如果典范函子

$$\text{sInd}(\mathcal{D}^{\text{cp}}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

是等价. 对普通 1-范畴采用相应的 1-sInd 版本; 本章把这样的 1-范畴称为**代数范畴**.

群、Abel 群、交换环与 R -模范畴都是这种范畴. 例如 Grp 中的紧投射生成元正是有限生成自由群及其收缩项. 更一般地, 若 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 全忠实, 其像落在 $\mathcal{D}^{\text{cp}}$ 中, 而且这一本质像沿筛余极限生成 $\mathcal{D}$, 那么泛性质给出的函子

$$\text{sInd}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

就是等价.

这个定义也说明了 Lawvere 理论与代数范畴之间的分工: Lawvere 理论记录有限生成自由对象之间的运算, 代数范畴则是由这些对象沿 1-筛余极限生成出的全部对象. 有限生成自由对象是最常用的一组生成元; 对它们取收缩闭包, 便得到全部紧投射对象.

§ 6.4 一般筛余完备化中的位置

筛余完备化不是孤立的构造. 设 $\mathcal{K}$ 是一类小范畴, 可以把 $\mathcal{K}$ 想成一张“允许添加的筛余极限形状清单”. 从 $\mathcal{C}$ 出发自由加入这些筛余极限, 所得范畴记作 $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(\mathcal{C})$; 它由泛性质

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{K}}(\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

刻画. 这里 $\mathcal{D}$ 具有 $\mathcal{K}$ -形筛余极限, 左边的函子保持这些筛余极限.

几种常见完备化可以放进同一张表里:

允许添加的筛余极限	所得完备化
全体小筛余极限	$\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$
κ -滤筛余极限	$\mathrm{Ind}_{\kappa}(\mathcal{C})$
筛余极限	$\mathrm{sInd}(\mathcal{C})$
幂等元的分裂	$\mathcal{C}^{\mathrm{idem}}$

当 $\mathcal{C}$ 已经带有限筛余积时, 式 (6.1) 还给出另一种读法: 筛余完备化是在保留这些有限筛余积关系的前提下, 把其余所需的筛余极限自由补齐. 这正是为什么“保持有限乘积的预层”与“筛余完备化”会描述同一个范畴. 至此, 群的例子已经被整理成一个呈现无关的一般机制; 接下来才把它应用于生象化.

§ 6.5 应用一: 生象化

现在进入正题. 设 $\mathcal{C}$ 是代数范畴, 也就是紧投射生成的 1-范畴. 在集合值世界里, 它可以写成

$$\mathcal{C} \simeq 1\text{-sInd}(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\Pi}((\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}).$$

要把其中的代数结构“导出”, 最直接的办法就是把集合换成生象.

定义 6.5.1. (生象化) 紧投射生成 1-范畴 $\mathcal{C}$ 的**生象化**定义为

$$\mathrm{Ani}(\mathcal{C}) := \mathrm{sInd}(\mathcal{C}^{\mathrm{cp}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\Pi}((\mathcal{C}^{\mathrm{cp}})^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani}).$$

注记 6.5.2. (呈现无关性) 定义 6.5.1 本身没有选择模型. 在适当条件下, 可以用取值于单纯集的代数对象或其他具体范畴呈现同一个范畴; 这些呈现适合计算, 但“生象化”指的是上面的泛性质所刻画的对象, 而不是某一种模型结构.

直观上, 经典对象只记录元素与等式, 生象化后的对象还记录元素之间的同伦、同伦之间的同伦, 以及继续向上的全部相容信息. 这句话只是帮助理解定义的图像, 精确内容仍是式 (6.1) 给出的泛性质. 不过代数运算本身并没有丢掉, 因为它们仍由 $\mathcal{C}^{\text{cp}}$ 中的态射编码.

由离散生象嵌入 $\text{Set} \hookrightarrow \text{Ani}$, 我们得到全忠实函子

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \text{Ani}(\mathcal{C}).$$

它的像由 0-截断对象组成, 所以我们也把 $\mathcal{C}$ 中的对象称为 **静态对象**. 对一个生象对象逐点取 π_0 , 则会回到相应的静态代数结构.

例 6.5.3. 下面这些例子值得记住.

1. $\text{Ani}(\text{Set}) \simeq \text{Ani}$. 换言之, 可以把生象直观地理解成“导出集合”.
2. $\text{Ani}(\text{Grp})$ 是生象中的群对象范畴, 也就是群状 $\mathbb{E}_1$ -空间所成的范畴.
3. Dold-Kan 对应给出

$$\text{Ani}(\text{Ab}) \simeq \text{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}),$$

这与命题 3.1.12 相呼应.

4. 对静态环 R , 有

$$\text{Ani}(\text{Mod}_R) \simeq \text{D}_{\geq 0}(R).$$

5. $\text{Ani}(\text{CRing})$ 是生象交换环范畴; $\text{Ani}(R\text{-Alg})$ 则是生象 R -代数范畴.

警告 6.5.4. 生象交换环与连合 $\mathbb{E}_{\infty}$ -环谱不是同一个概念. 前者由普通交换环的筛余完备化, 也就是非 Abel 导出得到; 后者是谱中的交换代数. 单纯交换环可以作为前者的一种常用呈现, 但不是这里的定义. 若 k 是 $\mathbb{Q}$ -代数, 生象 k -代数与连合 $\mathbb{E}_{\infty}$ - k -代数等价 [Lurie, 2009a, Proposition 4.1.11(4)]; 但在正特征下会出现除幂等额外现象. 因而在没有指定有理基环时, 不能不加说明地把 $\text{Ani}(\text{CRing})$ 写成 $\text{CAlg}(\text{Sp})_{\geq 0}$.

§ 6.6 应用一的检验: 与经典导出范畴比较

Lurie 在 [Lurie, 2009b, § 5.5.8] 中把筛余完备化称作 **非 Abel 导出范畴**. 这个名字很贴切, 但也容易让人误以为它只是经典导出范畴换了一套语言. 二者的关系其实更微妙.

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 对一个态射 $f: X \rightarrow Y$, 在 $\mathcal{A}$ 中有推出图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{coker}(f). \end{array}$$

把对象放进 $D_{\geq 0}(\mathcal{A})$ 后, 这个方块仍是推出方块当且仅当 f 是单射. 因而嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow D_{\geq 0}(\mathcal{A})$ 保持哪些推出, 不只取决于图表的形状, 还取决于其中的具体态射. 所以不能简单地说: 从整个 $\mathcal{A}$ 出发自由加入某一类固定形状的余极限, 就得到了它的导出范畴.

若 $\mathcal{A}$ 是带足够投射对象的小 Abel 范畴, 情形就清楚得多. 记 $\mathcal{A}_{\text{proj}}$ 为投射对象所成的全子范畴. 按照本讲义的分次约定, 我们把 Lurie 记作 $D_{\geq 0}^-(\mathcal{A})$ 的非负部分简称为 $D_{\geq 0}(\mathcal{A})$. 此时 [Lurie, 2017, Lemma 1.3.3.17] 给出

$$D_{\geq 0}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{P}^{\{\Delta^{\text{op}}\}}(\mathcal{A}_{\text{proj}}). \quad (6.2)$$

也就是说, 从投射对象出发自由加入单纯对象的几何实现, 就能得到连合导出范畴.

另一方面, 先在普通范畴中作紧投射闭包

$$\mathcal{A}^\wedge := 1\text{-sInd}(\mathcal{A}_{\text{proj}}),$$

再生象化, 得到

$$\text{Ani}(\mathcal{A}^\wedge) \simeq \text{sInd}(\mathcal{A}_{\text{proj}}).$$

与式 (6.2) 相比, 这里除了几何实现还允许滤余极限.

应用到模范畴时要稍微留意大小问题: 不把大范畴 Mod_R 直接代入上面的小范畴结论, 而是取有限生成投射模所成的本质小范畴 fProj_R (等价地, 取有限自由模的收缩闭包). 于是

$$\text{Ani}(\text{Mod}_R) \simeq \text{sInd}(\text{fProj}_R) \simeq D_{\geq 0}(R),$$

这正是例 6.5.3 中的等价.

§ 6.7 函子性: 生象化函子

筛余完备化的泛性质也把许多经典函子自动提升到生象世界. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是紧投射生成的 1-范畴, 并给定函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. 将它限制到紧投射对象, 再作筛余连续延拓, 得到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{cp}} & \xrightarrow{\quad} & \text{Ani}(\mathcal{C}) \\ F|_{\mathcal{C}^{\text{cp}}} \downarrow & & \downarrow \text{Ani}(F) \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \text{Ani}(\mathcal{D}). \end{array}$$

我们把虚线函子记作

$$LF: \text{Ani}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ani}(\mathcal{D}),$$

称为 F 的**生象化**; 在导出语言中也可称为左导出函子. 它由两条性质刻画: 保持筛余极限, 并且在 $\mathcal{C}^{\text{cp}}$ 上与原来的 F 一致.

这里要分清“由 F 构造”与“在所有静态对象上延拓 F ”. LF 只由限制 $F|_{\mathcal{C}^{\text{cp}}}$ 决定; 对一般的 F , 它在 $\mathcal{C}$ 的其余对象上未必仍等于 F . 若 F 本身保持 1-筛余极限, 才能由生成性推出二者在整个 $\mathcal{C}$ 上一致.

这里有一个实用的复合准则. 若 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 把紧投射对象送到紧投射对象, 而 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 是另一个函子, 那么

$$L(G \circ F) \simeq LG \circ LF.$$

理由很简单: 等式两边都保持筛余极限, 而且在生成元 $\mathcal{C}^{\text{cp}}$ 上取值相同. 如果 F 不保持紧投射对象, 这样的复合等价就不再是形式结论, 必须另外检查零调性或完备性条件.

§ 6.8 应用二: 生象环及其上的模

最后把上面的机器用在交换环上. 记 fPoly 为 $\mathbb{Z}$ 上有限多个变量的多项式环所成的范畴, 包括零变量的情形 $\mathbb{Z}$. 它是 CRing 中的一组紧投射生成元, 有限余积由张量积给出.

定义 6.8.1. 一个生象交换环是把有限余积变成有限乘积的函子

$$A: \text{fPoly}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ani}.$$

它们所成的范畴记为 AnCRing . 因而

$$\text{AnCRing} \simeq \text{Ani}(\text{CRing}) \simeq \text{Fun}^{\Pi}(\text{fPoly}^{\text{op}}, \text{Ani}).$$

为了同时描述环与模, 令 fPolyMod 为如下范畴:

- 对象是二元组 (A, M) , 其中 $A \in \text{fPoly}$, 而 M 是有限秩自由 A -模;
- 从 (A, M) 到 (A', M') 的态射由环同态 $f: A \rightarrow A'$ 与 A' -模同态

$$A' \otimes_A M \longrightarrow M'$$

组成.

投影 $(A, M) \mapsto A$ 记录了基环的变化. 对这个由基变换刻画的推出纤维化作相对的、逐纤维的筛余完备化; 在当前代数情形, 这一相对构造可以由相应的总范畴筛余完备化来实现. 以下把所得投影记作

$$p: \text{Mod}_{\geq 0} := \text{sInd}(\text{fPolyMod}) \longrightarrow \text{AnCRing}.$$

定义 6.8.2. 对生象环 A , 它的生象模范畴定义为 p 在 A 上的纤维:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{\geq 0}(A) & \longrightarrow & \text{Mod}_{\geq 0} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \{A\} & \longrightarrow & \text{AnCRing}. \end{array}$$

当 $A = R$ 是静态交换环时, 这会还原熟悉的等价

$$\mathbf{Mod}_{\geq 0}(R) \simeq \mathbf{D}_{\geq 0}(R).$$

因此“生象模”并不是另外发明的一种模, 而是把普通模的投射分解及其全部高阶同伦统一放进了一个范畴里.

普通代数中还有对称代数函子

$$\mathrm{Sym}_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} (M^{\otimes_A n})_{\Sigma_n}.$$

先把它限制到有限自由生成元, 再作筛余连续延拓, 就自动得到导出对称代数

$$\mathrm{LSym}: \mathbf{Mod}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbf{AnCRing}.$$

这里得到的是经典对称幂的非 Abel 左导出. 一般只有自然映射

$$(M^{\otimes_A n})_{h\Sigma_n} \longrightarrow \mathrm{LSym}_A^n(M),$$

它在 A 为 $\mathbb{Q}$ -代数时才是等价 [Lurie, 2004, § 2.6]. 因而在积分或正特征情形, 不能只靠同伦轨道来恢复导出对称幂; 额外的除幂信息正是生象交换代数结构的一部分.

最后总结一下这条构造路线. 对一个代数范畴:

1. 先选取有限生成自由对象, 或更内在地选取紧投射对象;
2. 在 1-范畴中用筛余极限恢复原来的静态代数范畴;
3. 在 ∞ -范畴中作同一个筛余完备化, 便得到其生象化, 而生成元上的函子也可沿泛性质延拓.

紧投射生成是假设的一部分, 因而这不是对任意 1-范畴都适用的口号. 下一章回到本部分的单子主线: Barr–Beck 定理解决的是“何时由一个单子恢复范畴”, 本章解决的则是“何时由有限自由对象和指定余极限恢复范畴”. 两种机制将在后面的导出代数与下降应用中配合使用.

第7章

单子与 Barr–Beck 定理

这一章我们来介绍单子. 主要目标是陈述并证明 Lurie–Barr–Beck 定理: 在适当条件下, 一个伴随对可以把范畴 $\mathcal{D}$ 展示为某个单子的模范畴.

读这一章时可以抓住一条主线: 伴随 $F \dashv G$ 先给出自函子 $T = GF$, 自同态对象的泛性质再把它提升为单子, 最后由分裂单纯对象的几何实现判断比较函子 $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$ 何时是等价. 下一章会把这条主线逐项用于余单纯范畴的整体化.

§ 7.1 单子

定义 7.1.1. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. $\mathcal{C}$ 上的自函子范畴带有由复合给出的幺半结构, 我们把它记为

$$\mathbf{End}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^\circ.$$

这里的复合约定是 $S \otimes T := S \circ T$; 换句话说, S 在 T 之后作用.

1. $\mathcal{C}$ 上的一个单子, 是 $\mathbf{End}(\mathcal{C})$ 中的代数对象.
2. 若 T 是 $\mathcal{C}$ 上的单子, 那么由例 5.4.10 与定义 5.4.16, 可以用 $\mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中左 T -模所构成的范畴.

注记 7.1.2. 定义 7.1.1 中的范畴 $\mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$, 正是经典 T -模范畴 (参见 § 4.2) 的高阶范畴版本. 详细构造可见 Lurie 的 *Higher Algebra* [Lurie, 2017, § 4.2.2].

定义 7.1.1 当然还有一个对偶版本.

定义 7.1.3. 令 $\mathcal{D}$ 为范畴. 同样地, 我们把由复合给出的自函子幺半范畴记为 $\mathbf{End}(\mathcal{D}) = \mathbf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{D})^\circ$.

1. $\mathcal{D}$ 上的一个余单子, 是 $\mathbf{End}(\mathcal{D})^{\mathrm{op}}$ 中的代数对象.

2. 若 U 是 $\mathcal{D}$ 上的余单子, 那么 U^{op} 是 $\mathcal{D}^{\text{op}}$ 上的单子. 我们把 U -余模范畴记为

$$\mathbf{LComod}_U(\mathcal{D}) := \mathbf{LMod}_{U^{\text{op}}}(\mathcal{D}^{\text{op}})^{\text{op}}.$$

这个取反范畴的步骤保证遗忘函子的方向仍是 $\mathbf{LComod}_U(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$.

本章的核心结果如下.

定理 7.1.4. (Lurie-Barr-Beck 定理) 令 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ 为一对伴随函子, 其中 $F \dashv G$. 假设:

- 函子 G 是保守的. 换句话说, $\mathcal{D}$ 中的态射 f 是等价, 当且仅当 $G(f)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的等价.
- 范畴 $\mathcal{D}$ 具有单纯对象的几何实现.
- 函子 G 保持这些几何实现.

那么 $\mathcal{C}$ 上的自函子

$$T := G \circ F$$

自然带有单子结构, 并且存在范畴等价 $G': \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$, 使得 G 等价于复合

$$\mathcal{D} \xrightarrow{G'} \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C}) \xrightarrow{U_T} \mathcal{C},$$

其中 U_T 是遗忘函子. 也就是说, G 将 $\mathcal{D}$ 展示为诱导单子 $T \simeq GF$ 的模范畴.

定理 7.1.4 的证明自然分成两步:

1. 在 $T = G \circ F$ 上构造单子结构, 再构造比较函子 $G': \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$.
2. 证明这个比较函子 G' 是范畴等价.

与 § 4.2 中讨论的 1-范畴情形不同, 在一般的高阶范畴里, 第 1 步其实要麻烦得多. 要在自函子 T 上定义代数结构, 只写下一个乘法态射 $T \circ T \rightarrow T$ 还远远不够; 我们还得补上一整套无穷层次的相容性资料, 而这些资料很难直接写出来.

所以我们会换一种做法: 不直接构造 T 上的单子结构, 而是用泛性质来刻画它. 等 T 与 G' 构造出来以后, 我们再证明一个稍强的结论, 从而完成第 2 步.

§ 7.2 分裂单纯对象

记号 7.2.1. 定义范畴 $\Delta_{-\infty}$ 如下:

- $\Delta_{-\infty}$ 的对象是 $[n]$, 其中整数 $n \geq -1$.
- 从 $[m]$ 到 $[n]$ 的态射, 是满足 $\alpha(-\infty) = -\infty$ 的单调不减函数

$$\alpha: [m] \cup \{-\infty\} \longrightarrow [n] \cup \{-\infty\}.$$

注记 7.2.2. 直接从定义就能看到有包含关系

$$\Delta \subseteq \Delta_+ \subseteq \Delta_{-\infty}.$$

定义 7.2.3. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 并令 $X_\bullet: \Delta_+^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的增广单纯对象. 如果 $X_\bullet$ 可以延拓成函子 $\Delta_{-\infty}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, 就称它是分裂的.

对于单纯对象 $X_\bullet: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, 如果它可以延拓成一个分裂增广单纯对象, 我们也称 $X_\bullet$ 是分裂的.

再给定函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. 如果 $F \circ X$ 是分裂的, 就称这个 (增广) 单纯对象 X 是 F -分裂的.

注记 7.2.4. 根据 [Lurie, 2009b, Lemma 6.1.3.16], 每个分裂增广单纯对象都是余极限图表. 此外, 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为函子, 并令 V 为 $\mathcal{C}$ 中的分裂单纯对象. 那么 $F \circ V$ 仍是 $\mathcal{D}$ 中的分裂单纯对象; 也就是说, F 会保持这个余极限.

构造 7.2.5. (杠构造) 令 A 为幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的结合代数, N 为右 A -模, M 为左 A -模. N 与 M 在 A 上的双边杠构造, 记为 $\text{Bar}_A(N, M)_\bullet$, 是 $\mathcal{C}$ 中如下的单纯对象:

- 在次数 $[n] \in \Delta^{\text{op}}$ 上,

$$\text{Bar}_A(N, M)_n := N \otimes A^{\otimes n} \otimes M.$$

- 面态射 $d_i: \text{Bar}_A(N, M)_n \rightarrow \text{Bar}_A(N, M)_{n-1}$ 由下面的态射诱导:

- 当 $i = 0$ 时, 使用右作用态射 $\text{act}_N: N \otimes A \rightarrow N$.
- 当 $0 < i < n$ 时, 使用乘法态射 $m: A \otimes A \rightarrow A$.
- 当 $i = n$ 时, 使用左作用态射 $\text{act}_M: A \otimes M \rightarrow M$.

- 退化态射 $s_i: \text{Bar}_A(N, M)_n \rightarrow \text{Bar}_A(N, M)_{n+1}$, 由在第 $(i + 1)$ 个位置插入单位态射 $e: \mathbb{1} \rightarrow A$ 得到.

例 7.2.6. 考虑函子 $\Phi: \Delta_{-\infty}^{\text{op}} \rightarrow \text{LM}$, 其中

$$\Phi(\{-\infty\} \cup [n]) = ([n], 0).$$

注意到 $\{-\infty\}$ 是 $\Delta_{-\infty}$ 的初始对象, 因而有典范自然变换 $\alpha: \Phi \Rightarrow \Phi_0$, 其中 Φ_0 是取常值 $\mathbf{m}$ 的常值函子.

现在, 令 $q: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow \text{LM}^\otimes$ 为推出纤维化, 它对应于一个幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的线性范畴 $\mathcal{M}$. 再令 $X: \text{LM} \rightarrow \mathcal{O}^\otimes$ 为 $\text{LMod}(\mathcal{M})$ 中的对象. 我们可以把 X 看成一对 (A, M) , 其中 A 是结合代数, M 是左 A -模.

复合 $X \circ \Phi$ 给出函子 $\Delta_{-\infty}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{O}^\otimes$. 由于 q 是推出纤维化, 可以把 α 提升成一个 q -推出自然变换

$$\bar{\alpha}: X \circ \Phi \longrightarrow X',$$

其中 $X': \Delta_{-\infty}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$.

把定义展开以后就会发现, $X' \mid_{\Delta^{\text{op}}}$ 正是杠构造 $\text{Bar}_A(A, M)_\bullet$. 因而 $\text{Bar}_A(A, M)_\bullet$ 是 $\mathcal{M}$ 中的分裂单纯对象. 更进一步, $X' \mid_{\Delta_+^{\text{op}}}$ 是余极限图表, 所以

$$|\text{Bar}_A(A, M)_\bullet| \simeq X'(\{-\infty\}) = M.$$

定义 7.2.7. (相对张量积) 令 $\mathcal{C}$ 为么半范畴. 假设 $\mathcal{C}$ 具有几何实现, 并且张量积 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 关于两个变量分别保持几何实现.

对于结合代数 A 、右 A -模 N 与左 A -模 M , 它们的相对张量积定义为相应杠构造的几何实现:

$$N \otimes_A M := |\text{Bar}_A(N, M)_\bullet|.$$

因此, 例 7.2.6 直接给出

$$A \otimes_A M \simeq M.$$

构造 $[n] \mapsto [0] \star [n] \simeq [n+1]$ 决定了函子 $\rho: \Delta_+ \rightarrow \Delta_+$. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$, 与 ρ 复合会给出从 $\mathcal{C}$ 中的增广单纯对象范畴到自身的函子, 我们把这个函子记为 T . 自然变换 $\text{id} \Rightarrow T$ 则决定了自然态射 $TX_\bullet \rightarrow X_\bullet$.

命题 7.2.8. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, $X_\bullet$ 为 $\mathcal{C}$ 中的增广单纯对象. 则以下条件等价:

1. $X_\bullet$ 是分裂的.
2. 典范态射 $TX_\bullet \rightarrow X_\bullet$ 有一个截面, 也就是说它具有右逆 s .

证明. [Lurie, 2017, Corollary 4.7.2.9] □

§ 7.3 自同态范畴

注记 本节只打算非正式地介绍接下来要用的观念. 若想看严格而详细的处理, 可以参考 Lurie 的 *Higher Algebra* [Lurie, 2017, § 4.7.1].

我们先从熟悉的例子开始. 对于 Abel 群 M , 从 M 到自身的群同态所构成的集合 $\text{End}(M)$ 是一个结合环: 加法逐点定义, 乘法则由函数复合给出. 这个环满足一个泛性质: 对于任意结合环 R , 给出环同态 $R \rightarrow \text{End}(M)$, 就等价于在 M 上给出 R -模结构.

现在把 Abel 群的么半范畴换成一般的么半范畴 $\mathcal{C}$.

定义 7.3.1. 令 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ 为么半范畴, $M \in \mathcal{C}$ 为对象. M 的一个自同态对象, 是对象 $E \in \mathcal{C}$ 连同态射 $a: E \otimes M \rightarrow M$, 并且它满足如下泛性质: 对任意对象 $C \in \mathcal{C}$, 与 a 复合诱导映射生象的等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, E) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C \otimes M, M).$$

为了把这个想法用到 Barr-Beck 定理第 1 步的证明中, 我们还得再推广一次: 不再要求 M 属于幺半范畴本身, 而只要求它所在的范畴带有这个幺半范畴的作用. 这正是线性范畴这个概念要描述的事情.

具体来说, 令 $\mathcal{M}$ 为幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的线性范畴. 对任意对象 $M \in \mathcal{M}$, 我们仍然可以定义它的自同态对象.

定义 7.3.2. 令 $\mathcal{M}$ 为幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的线性范畴, $M \in \mathcal{M}$. M 的自同态对象 $\text{End}(M)$, 是 $\mathcal{C}$ 中表示 M 上作用函子的对象. 也就是说, 对任意 $C \in \mathcal{C}$, 都有自然等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \text{End}(M)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}}(C \otimes M, M).$$

如果 $\text{End}(M)$ 存在, 那么它自然继承 $\mathcal{C}$ 中的结合代数结构. 更准确地说, 它是作用在 M 上的泛结合代数: 对任意结合代数对象 $A \in \text{Alg}(\mathcal{C})$, 都有等价

$$\text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{C})}(A, \text{End}(M)) \simeq \{A\} \times_{\text{Alg}(\mathcal{C})} \text{LMod}(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} \{M\}.$$

构造 $\text{End}(M)$ 的关键一步, 是研究从作用在 M 上的代数范畴到所有代数范畴的遗忘函子.

命题 7.3.3. 令 $\mathcal{M}$ 为幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的线性范畴, $M \in \mathcal{M}$. 则遗忘函子

$$U: \text{LMod}(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} \{M\} \longrightarrow \text{Alg}(\mathcal{C})$$

是右纤维化.

证明. 见 [Lurie, 2017, Corollary 4.7.1.42]. □

既然 U 是右纤维化, 我们自然会问它是否可表. 如果能找到表示这个纤维化的对象 $\text{End}(M) \in \text{Alg}(\mathcal{C})$, 就会得到等价

$$\text{LMod}(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} \{M\} \simeq \text{Alg}(\mathcal{C})_{/\text{End}(M)},$$

也就找到了想要的泛自同态代数.

这个表示对象的构造依赖于一个稍微技术性的概念, 即 M 的自同态范畴 $\mathcal{C}[M]$. 非正式地说, 它的对象是二元组

$$(C, \eta: C \otimes M \rightarrow M),$$

其中 $C \in \mathcal{C}$, 而 η 是作用态射. 幺半结构由作用的复合给出:

$$(C, \eta) \otimes (C', \eta') = (C \otimes C', \eta''),$$

其中 η'' 是复合

$$C \otimes C' \otimes M \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta'} C \otimes M \xrightarrow{\eta} M.$$

命题 7.3.4. 存在范畴等价

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{C}[M]) \simeq \mathrm{LMod}(\mathcal{M}) \times_{\mathcal{M}} \{M\}.$$

证明. 见 [Lurie, 2017, Theorem 4.7.1.34]. $\square$

这个等价告诉我们, 自同态代数 $\mathrm{End}(M)$ 可以完全由泛性质构造出来: 取么半范畴 $\mathcal{C}[M]$ 的终对象, 再沿遗忘函子 $\mathcal{C}[M] \rightarrow \mathcal{C}$ 取像即可. 么半范畴中的终对象自动是代数对象 (见 [Lurie, 2017, Corollary 3.2.2.4]), 所以 $\mathrm{End}(M)$ 确实会继承所需的结合代数结构.

§ 7.4 Lurie-Barr-Beck 定理

这一节我们来证明定理 7.1.4. 按照定义 7.1.1 中的复合约定, $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ 通过后复合作用在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ 上:

$$\mathrm{End}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C}), \quad (T, G) \longmapsto T \circ G.$$

因此 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ 是 $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ 上的线性范畴. 注意, 这里是值域一侧的后复合作用, 不是定义域一侧的预复合作用.

引理 7.4.1. 令 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$ 为伴随对, 其中 $F \dashv G$, 并令 $c: F \circ G \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为余单位. 那么 c 诱导态射

$$(G \circ F) \circ G \simeq G \circ (F \circ G) \xrightarrow{G(c)} G,$$

而这个态射把 $G \circ F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 展示为 G 的自同态对象.

证明. 只需证明: 对每个 $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 先把自然变换在右侧与 G 复合, 再接上面的作用态射, 会诱导等价

$$\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(U, G \circ F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})}(U \circ G, G).$$

记 u 为伴随 $F \dashv G$ 的单位. 它诱导映射 β , 即复合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})}(U \circ G, G) \xrightarrow{(-) \circ F} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(U \circ G \circ F, G \circ F) \xrightarrow{- \circ U(u)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(U, G \circ F).$$

因为 u 与 c 是同一个伴随的单位与余单位, 三角恒等式说明 β 正是 α 的逆. $\square$

定义 7.4.2. 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. G 的一个自同态单子由以下资料组成:

- 单子 $T \in \mathrm{Alg}(\mathrm{End}(\mathcal{C}))$.
- 左 T -模 $\overline{G} \in \mathrm{LMod}_T(\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C}))$, 它在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ 中的像就是 G .

并且我们要求作用态射 $T \circ G \rightarrow G$ 把 T 展示为 G 的自同态对象.

把引理 7.4.1 与命题 7.3.4 合在一起, 就得到自同态单子的另一个等价描述.

命题 7.4.3. 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为函子. 假设存在函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 与自然变换 $u: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, 并且 u 是伴随 $F \dashv G$ 的单位. 那么:

1. G 的自同态单子存在; 它的底层自函子等价于 $G \circ F$.
2. 令 T 为 $\mathcal{C}$ 上的单子, 并令 $\overline{G} \in \text{LMod}_T(\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C}))$ 为 G 的提升. 那么 $\overline{G}$ 把 T 展示为 G 的自同态单子, 当且仅当复合

$$T \xrightarrow{T(u)} T \circ G \circ F \xrightarrow{a \circ F} G \circ F$$

是 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 中的等价, 其中 $a: T \circ G \rightarrow G$ 表示 T 在 G 上的作用.

现在假设函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 带有单子 $T \in \text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C}))$ 的左模结构. T 在 G 上的作用会决定函子

$$G': \mathcal{D} \longrightarrow \text{LMod}_T(\mathcal{C}),$$

使得 G 等价于 G' 与遗忘函子 $\text{LMod}_T(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 的复合. 至此, 我们就完成了第 1 步.

定义 7.4.4. 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为具有左伴随 F 的函子. 由命题 7.4.3, G 具有诱导自同态单子 $T \simeq G \circ F$. 如果相应的比较函子

$$G': \mathcal{D} \longrightarrow \text{LMod}_T(\mathcal{C})$$

是等价, 就称 G 是单子性的; 也就是说, G 将 $\mathcal{D}$ 展示为 $\mathcal{C}$ 上的单子模范畴.

例 7.4.5. 把 Set 与 Monoid 看成 1-范畴. 从幺半群到集合的遗忘函子是单子性的; 换句话说, 它把 Monoid 展示为 Set 上相应单子的模范畴.

定义 7.4.4 也有对偶版本.

定义 7.4.6. 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为具有右伴随 G 的函子, 并令

$$U \simeq F \circ G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

为相应的自同态余单子. 由命题 7.4.3 的对偶版本, F 可以分解为

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F'} \text{LComod}_U(\mathcal{D}) \xrightarrow{F''} \mathcal{D}.$$

如果 F' 是等价, 就称 F 是余单子性的; 也就是说, F 将 $\mathcal{C}$ 展示为 $\mathcal{D}$ 上相应余单子的余模范畴.

下面给出定理 7.1.4 更精确的版本.

定理 7.4.7. (Lurie-Barr-Beck 定理的精确形式) 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为具有左伴随 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 的函子. 以下条件等价:

1. 函子 G 是单子性的; 也就是说, G 将 $\mathcal{D}$ 展示为 $\mathcal{C}$ 上诱导单子 $T \simeq GF$ 的模范畴.
2. 存在么半范畴 $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的左作用、结合代数 $T \in \text{Alg}(\mathcal{E})$, 以及等价

$$G': \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \text{LMod}_T(\mathcal{C}),$$

使得 G 等价于复合

$$\mathcal{D} \xrightarrow{G'} \text{LMod}_T(\mathcal{C}) \xrightarrow{U_T} \mathcal{C},$$

其中 U_T 为遗忘函子.

3. 函子 G 满足以下条件:

- a) 函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 是保守的. 也就是说, $\mathcal{D}$ 中的态射 $f: D \rightarrow D'$ 是等价, 当且仅当 $G(f)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的等价.
- b) 若 V 是 $\mathcal{D}$ 中的 G -分裂单纯对象, 那么 V 在 $\mathcal{D}$ 中具有余极限, 并且这个余极限由 G 所保持.

注记 7.4.8. 条件 3a) 与 3b) 可以合并成下面一个条件:

- 令 $V: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ 为 $\mathcal{D}$ 中的 G -分裂单纯对象. 那么 V 在 $\mathcal{D}$ 中具有余极限. 而且, 任意延拓 $\bar{V}: \Delta^{\text{op}, \triangleright} \rightarrow \mathcal{D}$ 是余极限图表, 当且仅当 $G \circ \bar{V}$ 是余极限图表.

为了证明定理 7.4.7, 我们先准备下面两个引理.

引理 7.4.9. 令 $\mathcal{C}$ 为么半范畴, $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{C}$ -线性范畴, A 为 $\mathcal{C}$ 中的结合代数对象, 并令

$$\theta: \text{LMod}_A(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$$

为遗忘函子. 那么:

1. $\text{LMod}_A(\mathcal{M})$ 中每个 θ -分裂单纯对象都具有余极限.
2. θ 保持 θ -分裂单纯对象的余极限.

证明. 1. 由定义 5.4.16 与例 5.2.7, 可以把 $\text{LMod}_A(\mathcal{M})$ 中的单纯对象看成 $\mathcal{M}^{\otimes}$ 中的双单纯对象. 为了避免混淆, 我们用 K 表示 θ -分裂单纯对象的指标范畴 Δ^{op} .

考虑拉回图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\otimes} \\ \downarrow p & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta^{\text{op}} & \xrightarrow{A} & \mathcal{C}^{\otimes}. \end{array}$$

由引理 A.1.1, p 是局部推出纤维化.

令 $v: K \rightarrow \text{LMod}_A(\mathcal{M})$ 为一个 θ -分裂单纯对象, 它对应于双单纯对象

$$V: K \times \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{N}.$$

可以看到, p 的每个纤维都等价于 $\mathcal{M}$. 在这个等价下, 每个诱导函子

$$V_{[n]}: K \times \{[n]\} \longrightarrow \mathcal{N}_{[n]}$$

都由底层的单纯对象

$$K \xrightarrow{v} \mathbf{LMod}_A(\mathcal{M}) \xrightarrow{\theta} \mathcal{M}$$

函子性地得到. 因此每个 $V_{[n]}$ 都是分裂单纯对象.

使用 [Lurie, 2009b, Lemma 6.1.3.16], 可知每个 $V_{[n]}$ 都具有余极限

$$\bar{V}_{[n]}: K^{\triangleright} \longrightarrow \mathcal{N}_{[n]},$$

而且这些余极限由相应的函子 $\mathcal{N}_{[n]} \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$ 所保持. 再用 [Lurie, 2009b, Proposition 4.3.1.10], 得到每个 $\bar{V}_{[n]}$ 都是 p -余极限图表.

因而有交换图表

$$\begin{array}{ccc} K \times \Delta^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{V} & \mathcal{N} \\ \downarrow & \searrow \bar{V} & \downarrow p \\ K^{\triangleright} \times \Delta^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \Delta^{\mathrm{op}}. \end{array}$$

根据 [Lurie, 2017, Lemma 3.2.2.9], 存在函子 $\bar{V}: K^{\triangleright} \times \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{N}$ 使上图交换, 并且对每个 $[n] \in \Delta$, $\bar{V}_{[n]}$ 都是 p -余极限图表. 此外, 伴随态射

$$\bar{v}: K^{\triangleright} \longrightarrow \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{N})$$

是 $p^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ -余极限图表.

由于 $v = \bar{v} \mid_K$ 穿过全子范畴

$$\mathbf{LMod}_A(\mathcal{M}) \subseteq \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{N}),$$

不难看出 $\bar{v}$ 也穿过这个全子范畴. 所以 $\bar{v}$ 就是 v 的余极限.

2. 这直接来自等式

$$\theta \circ \bar{v} = \bar{V} \mid_{K^{\triangleright} \times \{[0]\}}.$$

□

引理 7.4.10. 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为具有左伴随 F 的函子, 并令 T 为 G 的自同态单子. 假设每个 G -分裂单纯对象都在 $\mathcal{D}$ 中具有余极限, 而且这个余极限由 G 所保持. 那么比较函子

$$G': \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$$

具有全忠实的左伴随.

证明. 令 $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$ 为如下对象张成的全子范畴: 对于 $M \in \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$, 预层

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})}(M, G'(-)) \in \mathbf{PSh}(\mathcal{D})$$

由某个对象 $F'(M) \in \mathcal{D}$ 余可表. 这样一来, $M \mapsto F'(M)$ 决定函子 $F': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$, 可以把它看成 G' 的一个部分定义的左伴随.

我们要证明 $\mathcal{X} \simeq \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$. 记

$$U_T: \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

为遗忘函子. 它具有左伴随 $F'': \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$; 非正式地说, F'' 由 $C \mapsto T(C)$ 给出. 根据 G' 的定义, 有 $U_T \circ G' \simeq G$.

令 $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$ 为如下对象 M 张成的全子范畴: 左伴随单位在应用 U_T 后给出的态射

$$u_M: U_T(M) \longrightarrow U_T G' F'(M) \simeq G F'(M)$$

是等价.

对每个 $C \in \mathcal{C}$, 对象 $F''(C)$ 都属于 $\mathcal{X}$, 并且有典范等价 $F(C) \simeq F' F''(C)$. 因此 $u_{F''(C)}$ 可以认作态射

$$T(C) \simeq U_T F''(C) \longrightarrow U_T G' F' F''(C) \simeq G F(C),$$

而命题 7.4.3 说明这个态射是等价. 所以 $\mathcal{X}_0$ 包含 F'' 的本质像.

接下来只需证明 $\mathcal{X}_0 \simeq \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$. 取任意 $M \in \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$, 并令

$$M_\bullet = \mathrm{Bar}_T(T, M)$$

为杠构造给出的 $\mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$ 中的单纯对象 (构造 7.2.5). 由例 7.2.6, 有

$$M \simeq |M_\bullet| \simeq T \otimes_T M,$$

并且 $M_\bullet$ 是 U_T -分裂的.

每个 M_n 都落在 F'' 的本质像中, 因而属于 $\mathcal{X}_0$. 于是

$$G(F'(M_\bullet)) \simeq U_T(M_\bullet)$$

是 $\mathcal{C}$ 中的分裂单纯对象, 从而 $F'(M_\bullet)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 G -分裂单纯对象. 根据假设, $F'(M_\bullet)$ 具有余极限 $D \in \mathcal{D}$. 于是 $M \in \mathcal{X}$, 并且 $F'(M) \simeq D$. 此时 u_M 由复合

$$U_T(M) \simeq |U_T(M_\bullet)| \simeq |G(F'(M_\bullet))| \longrightarrow G|F'(M_\bullet)| \simeq G F'(M)$$

给出. 因为 G 保持这个 G -分裂单纯对象的余极限, 上述态射是等价. 所以 $\mathcal{X}_0 \simeq \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C})$, 从而 F' 是 G' 的全忠实左伴随. $\square$

定理 7.4.7 的证明. 1 推出 2 是直接的: 取 $\mathcal{E} = \text{End}(\mathcal{C})$ 即可.

2 推出 3, 则来自引理 7.4.9 与引理 A.1.2.

最后证明 3 推出 1. 假设 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 具有左伴随, 因而具有自同态单子 $T \simeq GF$. 记

$$G': \mathcal{D} \longrightarrow \text{LMod}_T(\mathcal{C})$$

为相应的比较函子. 注意到 G' 是等价, 当且仅当它是保守的并且具有全忠实左伴随. 因为 $U_T \circ G' \simeq G$ 且 G 保守, 所以 G' 也是保守的; 而全忠实左伴随的存在性来自引理 7.4.10. 证毕. $\square$

实际应用中, 我们也经常使用定理 7.1.4 的对偶版本.

推论 7.4.11. 令 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为具有右伴随 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 的函子. 以下条件等价:

- 函子 F 是余单子性的; 也就是说, F 将 $\mathcal{C}$ 展示为 $\mathcal{D}$ 上相应余单子 $U \simeq F \circ G$ 的余模范畴.
- 函子 F 满足以下条件:
 - a') 函子 F 是保守的.
 - b') 若 V 是 $\mathcal{C}$ 中的 F -分裂余单纯对象, 那么 V 在 $\mathcal{C}$ 中具有极限, 并且这个极限由 F 所保持.

§ 7.5 例子

这一节我们来看一些单子的例子. 开始之前, 先对定理 7.4.7 做一个整体性的观察.

令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 并把它看成 $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 上的线性范畴. 我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc} \text{LMod}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C} \times \text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C})) \\ & \searrow p \quad \swarrow p' & \\ & \text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C})) & \end{array}$$

其中 θ 由 p 与遗忘函子 $\text{LMod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 决定.

函子 p' 显然是拉回纤维化, 而引理 A.1.2 说明 p 也是拉回纤维化. [Lurie, 2017, Proposition 4.2.3.1] 说明 θ 把 p -拉回态射送到 p' -拉回态射, 即

$$\theta \in \text{Cart}(\text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C}))).$$

因此 θ 分类了函子之间的自然变换 $F \Rightarrow F'$, 其中 $F = \text{St}(p)$ (也就是说, 对每个单子 $T \in \text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C}))$, 有 $F(T) \simeq \text{LMod}_T(\mathcal{C})$), 而 $F' = \text{St}(p')$ 是取常值 $\mathcal{C}$ 的常值函子.

所以可以把这个自然变换看成函子

$$\alpha: \text{Alg}(\text{End}(\mathcal{C}))^{\text{op}} \longrightarrow \text{Cat}_{/\mathcal{C}}.$$

定理 7.4.7 正好描述了 α 的本质像: 函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 属于 α 的本质像, 当且仅当 G 具有左伴随, 并且满足定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b). 再多做一些工作还能证明 α 是全忠实的. 换句话说, 可以把 $\mathcal{C}$ 上的单子认作位于 $\mathcal{C}$ 上方的某一类范畴.

例 7.5.1. 令 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 为单子性函子, 也就是说, G 将 $\mathcal{D}$ 展示为 $\mathcal{C}$ 上的单子模范畴. 假设 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{C}$ 都具有有限极限. 函子 G 左正合, 因而诱导函子

$$g: \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{Sp}(\mathcal{C}).$$

再假设 g 具有左伴随 f . 那么 g 是单子性的; 也就是说, 它把 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 展示为 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 上的单子模范畴.

为了证明这一点, 只需验证 g 满足定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b).

- 因为 G 是单子性的, 所以 G 保守. 对 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 中任意态射 $\varphi: X \rightarrow Y$ 以及任意 n , 都有

$$\Omega^{\infty-n} g(\varphi) \simeq G(\Omega^{\infty-n}(\varphi)).$$

由 G 的保守性逐层判断等价, 就知道 g 也是保守的.

- 令 $U_\bullet$ 为 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 中的 g -分裂单纯对象. 我们要证明 $U_\bullet$ 在 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 中具有余极限, 并且这个余极限由 g 所保持.

回忆稳定化可以用既约且切除的函子来描述:

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{Exc}_*(\mathbf{Ani}_*^{\text{fin}}, \mathcal{D}).$$

因此可以把 $U_\bullet$ 看成既约且切除的函子范畴中的单纯对象. 对任意有限带点生象 $K \in \mathbf{Ani}_*^{\text{fin}}$, $U_\bullet(K)$ 都是 $\mathcal{D}$ 中的 G -分裂单纯对象. 由定理 7.4.7, 它具有余极限 $V(K) \in \mathcal{D}$, 而且这个余极限由 G 所保持.

构造 $K \mapsto V(K)$ 决定函子 $V: \mathbf{Ani}_*^{\text{fin}} \rightarrow \mathcal{D}$. 还需要验证它既约且切除. 注意到有函子等价

$$G \circ V \simeq |g(U_\bullet)|,$$

而右边既约且切除. 由于 G 左正合且保守, 可以推出 V 也是既约且切除的. 最后, V 是 $U_\bullet$ 在 $\mathbf{Fun}(\mathbf{Ani}_*^{\text{fin}}, \mathcal{D})$ 中的余极限, 因而也是它在

$$\mathbf{Exc}_*(\mathbf{Ani}_*^{\text{fin}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{Sp}(\mathcal{D})$$

中的余极限; 按构造, 这个余极限由 g 所保持.

回忆定义 5.4.12.

例 7.5.2. 令 $q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}$ 为算畴之间的推出纤维化, 并令 $\mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ 为本质满的算畴态射. 假设:

1. 对每个 $X \in \mathcal{O}$, $\mathcal{C}_X$ 都具有单纯对象的几何实现.
2. 对每个多元态射 $\alpha \in \mathcal{O}(\{X_i\}_{i \in I}; Y)$, 诱导函子

$$\prod_{i \in I} \mathcal{C}_{X_i} \longrightarrow \mathcal{C}_Y$$

保持单纯对象的几何实现.

3. 遗忘函子

$$p: \text{Alg}_{/\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Alg}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{C})$$

具有左伴随.

那么 p 是单子性的; 也就是说, 它把 $\text{Alg}_{/\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ 展示为 $\text{Alg}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ 上的单子模范畴.

§ 7.6 补充

7.6.1 引理 7.4.9 的证明带来的几个推论

这一节记录几个从引理 7.4.9 的证明中顺手得到的有用结论.

命题 7.6.1. 令

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \perp & \\ & \xleftarrow{G} & \end{array}$$

为满足定理 7.4.7 条件 3a) 与 3b) 的伴随对. 那么对每个 $D \in \mathcal{D}$, 都存在以 D 为余极限的 G -分裂单纯对象

$$D_\bullet: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{D},$$

并且每个 D_n 都属于 F 的本质像.

注记 7.6.2. 在命题 7.6.1 的情形中, 可以让单纯对象 $D_\bullet$ 函子性地依赖于 D . 对每个 n , 还可以函子性地选取 $C \in \mathcal{C}$, 使得 $D_n \simeq F(C)$. 这既可以直接从引理 7.4.9 的证明看出来, 也可以把命题 7.6.1 用到伴随

$$\begin{array}{ccc} \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) & \xrightarrow{F'} & \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) \\ & \perp & \\ & \xleftarrow{G'} & \end{array}$$

上得到.

下面给出命题 7.6.1 的一个应用.

推论 7.6.3. 假设给定范畴的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{U} & \mathcal{C}' \\ & \searrow G & \swarrow G' \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

再假设:

1. 函子 G 与 G' 分别具有左伴随 F 与 F' .
2. $\mathcal{C}$ 中每个 G -分裂单纯对象都具有余极限, 而且这个余极限由 G 所保持.
3. $\mathcal{C}'$ 中每个 G' -分裂单纯对象都具有余极限, 而且这个余极限由 G' 所保持.
4. G' 是保守的.
5. 对每个 $D \in \mathcal{D}$, 单位态射

$$u_D: D \longrightarrow GF(D) \simeq G'(UF(D))$$

在 $\mathcal{C}'$ 中诱导等价 $\alpha_D: F'(D) \rightarrow UF(D)$.

那么 U 具有全忠实的左伴随. 此外, U 是范畴等价, 当且仅当 G 是保守的.

证明. [Lurie, 2017, Corollary 4.7.3.16]

□

下一章会把这里的判别法用于余单纯范畴 $\mathcal{C}^\bullet$: 在第零项取值给出函子 $G: \text{Tot}(\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow \mathcal{C}^0$, Beck-Chevalley 条件负责构造它的左伴随并把诱导单子 GF 写成显式复合, 而本章的 Barr-Beck 定理则负责把整体化识别为该单子的模范畴. 因而, 后文出现“单纯对象的几何实现”与“余单纯对象的整体化”时, 两者正好处在彼此对偶的位置.

第8章

下降

本章先从静态交换环与静态模的经典下降资料出发; 这些对象组成 1-范畴. 随后我们把同一个问题放到 $\mathbf{Cat}$ 中, 用图表、伴随和极限给出同伦不变的表述.

令 $f: A \rightarrow B$ 为静态交换环之间的同态, 并令 M^0 为静态 B -模. 经典的下降理论想回答下面这个问题:

- 在什么条件下, 我们可以找到静态 A -模 M 以及同构 $\eta: M \otimes_A B \simeq M^0$?

一旦选定这样的同构 η , 就会得到静态 $B \otimes_A B$ -模之间的同构

$$\tau: B \otimes_A M^0 \simeq M^0 \otimes_A B.$$

这是因为等式两边都典范同构于 $M \otimes_A (B \otimes_A B)$. 不仅如此, 态射 τ 还满足一个“余循环条件”: 它使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} & B \otimes_A M^0 \otimes_A B & \\ \text{id} \otimes \tau \nearrow & & \searrow \tau \otimes \text{id} \\ B \otimes_A B \otimes_A M^0 & \xrightarrow{\tau'} & M^0 \otimes_A B \otimes_A B. \end{array}$$

这里 τ' 在最外侧两个因子上由 τ 给出, 在中间的因子上则是恒等态射 id_B .

所谓一份下降资料, 就是一个二元组 (M^0, τ) : 其中 M^0 是静态 B -模, $\tau: B \otimes_A M^0 \xrightarrow{\sim} M^0 \otimes_A B$ 是静态 $B \otimes_A B$ -模之间的同构, 并且它使上面的图表交换. 全体下降资料可以组织成一个 1-范畴 $\mathbf{Desc}(f)$, 而构造 $M \mapsto M \otimes_A B$ 则给出函子

$$F: \mathbf{Mod}^{\text{static}}(A) \longrightarrow \mathbf{Desc}(f).$$

这一章要建立下降理论的同伦不变版本. 为此, 我们先要做一点准备, 看看“取伴随函子”这件事怎样随图表函子性地变化.

§ 8.1 一些工具

这一节先介绍两个工具：可伴随方块与 Čech 脉。它们会把后面的下降论证整理成一个相当清楚的形式。

8.1.1 可伴随方块

定义 8.1.1. (可伴随方块) 考虑 $\mathbf{Cat}$ 中的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{G^*} & \mathcal{D} \\ F^* \downarrow & & \downarrow K^* \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{H^*} & \mathcal{D}' \end{array}$$

1. 如果 G^* 与 H^* 分别具有左伴随 $G_\#$ 与 $H_\#$, 并且 *Beck-Chevalley* 伴随变换

$$\mathrm{BC}_\# : H_\# \circ K^* \Rightarrow H_\# \circ K^* \circ G^* \circ G_\# \simeq H_\# \circ H^* \circ F^* \circ G_\# \Rightarrow F^* \circ G_\#$$

是等价, 就称这个方块是 (横向) 左可伴随的。

2. 如果 G^* 与 H^* 分别具有右伴随 G_* 与 H_* , 并且 *Beck-Chevalley* 伴随变换

$$\mathrm{BC}_* : F^* \circ G_* \Rightarrow H_* \circ H^* \circ F^* \circ G_* \simeq H_* \circ K^* \circ G^* \circ G_* \Rightarrow H_* \circ K^*$$

是等价, 就称这个方块是 (横向) 右可伴随的。

注记 8.1.2. 上面的定义可以自然地推广到任意 2-范畴 $\mathbb{D}$. 还有一个经常用到的对偶关系: 假设给定 $\mathbf{Cat}$ 中的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{G^*} & \mathcal{D} \\ F^* \downarrow & & \downarrow K^* \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{H^*} & \mathcal{D}' \end{array},$$

其中 G^* 、 H^* 具有左伴随, 而 F^* 、 K^* 具有右伴随. 那么上面的方块左可伴随, 当且仅当转置后的方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{C}' \\ G^* \downarrow & & \downarrow H^* \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{K^*} & \mathcal{D}' \end{array}$$

右可伴随。

定义 8.1.3. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴. 我们如下定义子范畴

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}).$$

1. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ 属于 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$, 当且仅当对 $\mathcal{C}$ 中每个态射 $X \rightarrow Y$, 诱导函子 $F(X) \rightarrow F(Y)$ 都具有左伴随.
2. 设 $F, F' \in \mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$. 自然变换 $\alpha: F \Rightarrow F'$ 是 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$ 中的态射, 当且仅当对每个态射 $X \rightarrow Y$, 所诱导的方块

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'(X) & \longrightarrow & F'(Y) \end{array}$$

都左可伴随.

把上面所有“左”都换成“右”, 就得到范畴 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{RAAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$.

命题 8.1.4. 令 $\mathcal{C}$ 为范畴, 那么:

1. $\mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$ 与 $\mathbf{Fun}^{\mathbf{RAAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$ 都是可表现范畴.
2. 嵌入

$$\mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}) \subseteq \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$$

与

$$\mathbf{Fun}^{\mathbf{RAAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}) \subseteq \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat})$$

都具有左伴随. 特别地, 这两个嵌入都保持小极限.

3. 存在典范的范畴等价

$$\mathbf{Fun}^{\mathbf{LAd}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat}) \simeq \mathbf{Fun}^{\mathbf{RAAd}}(\mathcal{C}, \mathbf{Cat}).$$

证明. 参见 [Lurie, 2017, Corollary 4.7.4.18]. □

8.1.2 Čech 脉

定义 8.1.5. (Čech 脉) 令 $\mathcal{C}$ 为具有有限积的范畴. 取值函子

$$\mathrm{ev}_{[0]}: \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}, \quad X_{\bullet} \longmapsto X_0$$

具有右伴随

$$\check{C}_{\bullet}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}).$$

它由沿函子 $i: [0] \hookrightarrow \Delta^{\mathrm{op}}$ 的右 Kan 延拓给出. 我们把单纯对象 $\check{C}_{\bullet}(X)$ 称为 X 的 Čech 脉.

注记 8.1.6. 用右 Kan 延拓的逐点公式可以把 $\check{C}_\bullet(X)$ 写得很具体. 对 $0 \leq i \leq n$, 记

$$\rho_i: \check{C}_n(X) \longrightarrow \check{C}_0(X)$$

为包含 $[0] \simeq \{i\} \subseteq [n]$ 所诱导的态射. 那么 $\{\rho_i\}_{0 \leq i \leq n}$ 把 $\check{C}_n(X)$ 展示成 $n+1$ 份 $\check{C}_0(X) = X$ 的乘积.

下面来看定义 8.1.5 的相对版本.

定义 8.1.7. (相对 Čech 脉) 令 $\mathcal{C}$ 为具有拉回的范畴, 并令 $f: X \rightarrow Y$ 为其中的态射. 把 f 看成切片范畴 $\mathcal{C}_{/Y}$ 中的对象以后, 它在 $\mathcal{C}_{/Y}$ 中的 Čech 脉称为 f 的 Čech 脉, 记作 $\check{C}_\bullet(X/Y)$.

注记 8.1.8. 利用注记 8.1.6, 我们同样可以逐项描述 $\check{C}_\bullet(X/Y)$. 对 $0 \leq i \leq n$, 令

$$\rho_i: \check{C}_n(X/Y) \longrightarrow \check{C}_0(X/Y) = X$$

为包含 $[0] \simeq \{i\} \subseteq [n]$ 所诱导的态射. 那么 $\{\rho_i\}_{0 \leq i \leq n}$ 把 $\check{C}_n(X/Y)$ 展示成迭代拉回

$$X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X,$$

其中因子 X 一共出现 $n+1$ 次.

注记 8.1.9. 我们也可以把 $\check{C}_\bullet(X/Y)$ 看成 $\mathcal{C}$ 中的增广单纯对象, 其中 $\check{C}_{-1}(X/Y) = Y$.

§ 8.2 下降与 Lurie–Beck–Chevalley 条件

本节把上一章的单子性判别真正接到下降问题上. 余单纯范畴的整体化先通过第零项取值映到 $\mathcal{C}^0$; Beck–Chevalley 条件用来构造这个函子的左伴随, 并把诱导单子写成 $d_\#^0 d^{1*}$. 随后 Lurie–Barr–Beck 定理把整体化识别成这个单子的模范畴. 本节末的对偶形式则把“左伴随、几何实现”同步换成“右伴随、整体化”, 它正是后面交换环谱下降会使用的版本.

现在回到本章开头的问题. 令 $f: A \rightarrow B$ 为静态交换环同态. 在 $(\mathbf{CRing}^{\text{static}})^{\text{op}}$ 中取 f 的 Čech 脉 (这里用到张量积给出交换环的推出), 我们得到余单纯静态交换环 $B^\bullet$, 其中

$$B^n \simeq \underbrace{B \otimes_A \cdots \otimes_A B}_{n+1 \text{ 个因子}}.$$

范畴 $\text{Desc}(f)$ 可以等同于 $B^\bullet$ 上满足基变换的相容性条件的余单纯模所成的范畴. 具体来说, 一个余单纯模 $M^\bullet$ 要求对 Δ 中每个态射 $[m] \rightarrow [n]$, 典范态射

$$M^m \otimes_{B^m} B^n \longrightarrow M^n$$

都是同构. 这里的相容性条件并不是要求某个方块为拉回, 而是要求每个指标态射诱导的伸缩标量比较态射为等价; 在当前静态模的情形中, 这正是上面所写的同构. 换一种说法,

$\text{Desc}(f)^{\text{op}}$ 可以等同于余单纯范畴 $\mathcal{C}^\bullet$ 的极限, 其中 $\mathcal{C}^n$ 是静态交换环 B^n 的模范畴的反范畴. 在足够好的情形下 (比如 f 忠实平坦), 这个极限等价于 A -模范畴的反范畴. 下面要做的, 就是建立一套证明这类结论的通用工具.

大体上说, 我们面对的问题是: 给定 Cat 中的余单纯对象 $\mathcal{C}^\bullet$, 怎样理解它的整体化

$$\text{Tot}(\mathcal{C}^\bullet) := \varprojlim \mathcal{C}^\bullet?$$

这里有一个显然的遗忘函子

$$G: \varprojlim \mathcal{C}^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}^0.$$

类比上面的例子, 我们自然会猜想: 整体化中的对象, 应当就是 $\mathcal{C}^0$ 中的对象再配上一份合适的“下降资料”.

把这个想法说精确的一种方式, 是证明遗忘函子 G 是单子性的 (定义 7.4.4). 也就是说, G 具有左伴随 F , 并且如果记它诱导的单子为

$$T := G \circ F: \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^0,$$

那么有等价

$$\varprojlim \mathcal{C}^\bullet \simeq \text{LMod}_T(\mathcal{C}^0).$$

我们先从一个关于范畴图表极限的通用结论开始.

命题 8.2.1. 令 $\mathcal{I}$ 为小范畴, 令 $q: \mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}$ 为一个图表, 并设它在 Cat 中的极限为 $\mathcal{C}$. 再取对象 $0 \in \mathcal{I}$, 并记 $\mathcal{C}^0 = q(0)$. 假设:

1. 典范函子 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^0$ 具有左伴随 F ;
2. 对每个 $I \in \mathcal{I}$, 都存在态射 $0 \rightarrow I$.

那么伴随 $\mathcal{C}^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$ 满足定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b). 因而 G 是单子性的; 更具体地, 若 $T := G \circ F$ 是 $\mathcal{C}^0$ 上由这个伴随诱导的单子, 则有等价

$$\mathcal{C} \simeq \text{LMod}_T(\mathcal{C}^0).$$

证明. 我们逐条验证定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b).

1. 先证明 G 是保守函子. 设 $\alpha: X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射, 并且 $G(\alpha)$ 是等价. 对每个 $I \in \mathcal{I}$, 选取态射 $0 \rightarrow I$, 并记相应的函子为 $H_I: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^I$. 由于 X 与 Y 是极限中的相容对象, α 在 $\mathcal{C}^I$ 中的分量等价于 $H_I(G(\alpha))$, 因而也是等价. 所以 α 本身是等价.
2. 现在设 $X_\bullet$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 G -分裂单纯对象. 我们要证明 $X_\bullet$ 在 $\mathcal{C}$ 中具有几何实现, 并且这个几何实现由 G 保持.

对 q 使用直化, 得到推出纤维化 $p: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{I}$. 记 $\text{Fun}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}, \mathcal{U})$ 为拉回

$$\begin{array}{ccc} \text{Fun}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) & \longrightarrow & \text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p_* \\ * & \xrightarrow{\{\text{id}_{\mathcal{I}}\}} & \text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{I}), \end{array}$$

并令

$$\text{Fun}_{\mathcal{I}}^{\text{cocart}}(\mathcal{I}, \mathcal{U}) \subseteq \text{Fun}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}, \mathcal{U})$$

为如下全子范畴: 其中的截面 $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ 把 $\mathcal{I}$ 中每个态射都送到 p -推出态射. 由 [Cnossen, 2025b, Proposition 21.5.2], 有范畴等价

$$\mathcal{C} \simeq \text{Fun}_{\mathcal{I}}^{\text{cocart}}(\mathcal{I}, \mathcal{U}).$$

对 $X_{\bullet}$ 去柯里化, 可以把它等同于函子

$$X: \mathcal{I} \times \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{U}.$$

我们用到下面这个事实:

(*) 存在函子

$$\overline{X} \in \text{Fun}_{\mathcal{I}}^{\text{cocart}}(\mathcal{I} \times \Delta_+^{\text{op}}, \mathcal{U}),$$

它是 X 的 p -左 Kan 延拓.

于是 $\overline{X}$ 可以看成 $\text{Fun}_{\mathcal{I}}^{\text{cocart}}(\mathcal{I}, \mathcal{U})$ 中的增广单纯对象. 由 [Lurie, 2017, Lemma 3.2.2.9], 这个增广对象是一个余极限图表; 在 0 处取值显然保持这个余极限, 所以 G 保持它.

□

现在取 $\mathcal{I} = \Delta$. 这时图表 $q: \mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}$ 就是一个余单纯范畴 $\mathcal{C}^{\bullet}$. 如果它满足命题 8.2.1 的条件, 就有

$$\varprojlim \mathcal{C}^{\bullet} \simeq \text{LMod}_T(\mathcal{C}^0).$$

接下来我们对 $\mathcal{C}^{\bullet}$ 加上一些温和的假设, 从而把这个单子 T 写得更具体.

定理 8.2.2. (Lurie–Beck–Chevalley) 令 $\mathcal{C}^{\bullet}: \Delta \rightarrow \text{Cat}$ 为余单纯范畴, 并假设它满足:

(*) 用 d^i 表示第 i 个余面态射. 对 Δ 中每个态射 $\alpha: [m] \rightarrow [n]$, 诱导方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^m & \xrightarrow{d^{0*}} & \mathcal{C}^{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^n & \xrightarrow{d^{0*}} & \mathcal{C}^{n+1} \end{array}$$

都左可伴随. 特别地, 每个余面函子 $d^{0*}: \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$ 都具有左伴随 $d_{\#}^0: \mathcal{C}^{n+1} \rightarrow \mathcal{C}^n$.

令

$$\mathcal{C} := \varprojlim \mathcal{C}^\bullet$$

为 $\mathcal{C}^\bullet$ 的整体化, 那么:

1. 遗忘函子 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^0$ 具有左伴随 F .

2. 方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C}^0 \\ G \downarrow & & \downarrow d^{1*} \\ \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{d^{0*}} & \mathcal{C}^1 \end{array}$$

左可伴随. 换句话说, 典范 *Beck-Chevalley* 伴随变换

$$d_{\sharp}^0 \circ d^{1*} \xrightarrow{\sim} G \circ F$$

是 $\mathcal{C}^0$ 上自函子之间的等价.

3. 伴随 $\mathcal{C}^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$ 满足定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b). 因而对于明确定义的单子 $T := G \circ F: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^0$, 存在等价

$$\mathcal{C} \simeq \mathbf{LMod}_T(\mathcal{C}^0).$$

证明. 令 $\bar{\mathcal{C}}^\bullet: \Delta_+ \rightarrow \mathbf{Cat}$ 为 $\mathcal{C}^\bullet$ 的极限增广: 也就是说, $\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \mathcal{C}$, 而这个增广图表本身是极限图表.

接下来定义函子

$$T: \Delta_+ \times [1] \longrightarrow \Delta_+.$$

这里的 T 是序数拼接函子, 与定理陈述中由伴随得到的单子 $G \circ F$ 无关. 它在对象上由

$$T([n], i) = \begin{cases} [n], & i = 0, \\ [0] \star [n] \simeq [n+1], & i = 1 \end{cases}$$

给出. 在态射上, $T(-, 0)$ 是恒等函子, $T(-, 1) = [0] \star (-)$; 而 $[1]$ 中的唯一非恒等态射 $0 \rightarrow 1$ 对应于自然的序数嵌入 $[n] \hookrightarrow [0] \star [n]$ (即第二个拼接因子的包含). 这三项资料唯一确定了 T .

考虑复合函子

$$H: \Delta_+ \times [1] \xrightarrow{T} \Delta_+ \xrightarrow{\bar{\mathcal{C}}^\bullet} \mathbf{Cat},$$

并把它看成箭头范畴 $\mathbf{Fun}([1], \mathbf{Cat})$ 中的增广余单纯对象 $\bar{X}^\bullet$. 要说明 $\bar{X}^\bullet$ 是极限图表, 等价于说明对 $i \in \{0, 1\}$, 限制 $H|_{\Delta_+ \times \{i\}}$ 都是极限图表. 当 $i = 0$ 时, 这来自 $\bar{\mathcal{C}}^\bullet$ 的构造; 当 $i = 1$ 时, 这是因为 $H|_{\Delta_+ \times \{1\}}$ 是分裂的.

令 $X^\bullet$ 为 $\overline{X}^\bullet$ 底层的余单纯对象. 条件 (*) 恰好说 $X^\bullet$ 取值于 $\text{Fun}^{\text{LAd}}([1], \text{Cat})$. 由命题 8.1.4, 这个子范畴在箭头范畴中保持极限, 所以极限增广 $\overline{X}^\bullet$ 也取值于 $\text{Fun}^{\text{LAd}}([1], \text{Cat})$.

特别地, $\overline{X}^{-1}$ 是 $\text{Fun}^{\text{LAd}}([1], \text{Cat})$ 中的对象, 因而遗忘函子

$$G: \mathcal{C} \simeq \overline{\mathcal{C}}^{-1} \longrightarrow \mathcal{C}^0$$

具有左伴随. 这就证明了 1.

而 2 等价于说态射 $X^{-1} \rightarrow X^0$ 是 $\text{Fun}^{\text{LAd}}([1], \text{Cat})$ 中的态射. 最后, 3 直接来自命题 8.2.1. $\square$

现在可以给出一个很方便的判别法, 用来判断函子 $\mathcal{C}^{-1} \rightarrow \varprojlim \mathcal{C}^\bullet$ 何时是等价.

推论 8.2.3. (Lurie–Beck–Chevalley) 令 $\mathcal{C}^\bullet: \Delta_+ \rightarrow \text{Cat}$ 为增广余单纯范畴, 并记 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}$. 令 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^0$ 为显然的函子. 假设:

1. $\mathcal{C}^{-1}$ 具有 G -分裂单纯对象的几何实现, 并且这些几何实现由 G 保持;
2. 对 Δ_+ 中每个态射 $\alpha: [m] \rightarrow [n]$, 方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^m & \xrightarrow{d^{0*}} & \mathcal{C}^{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^n & \xrightarrow{d^{0*}} & \mathcal{C}^{n+1} \end{array}$$

左可伴随.

那么典范函子

$$\theta: \mathcal{C} \longrightarrow \varprojlim_{n \in \Delta} \mathcal{C}^n$$

具有全忠实的左伴随. 如果 G 还是保守函子, 那么 θ 是等价.

证明. 令 $\mathcal{D}^\bullet: \Delta_+ \rightarrow \text{Cat}$ 为 $\mathcal{C}^\bullet|_\Delta$ 的极限增广. 因而有增广余单纯对象之间的态射

$$\alpha: \mathcal{C}^\bullet \longrightarrow \mathcal{D}^\bullet,$$

并且对每个 $n \geq 0$, 它在第 n 项上都是恒等态射 $\mathcal{C}^n = \mathcal{D}^n$.

对 $\mathcal{D}^\bullet|_\Delta$ 使用定理 8.2.2, 可知典范函子

$$G': \mathcal{D}^{-1} \longrightarrow \mathcal{D}^0 \simeq \mathcal{C}^0$$

具有左伴随 F' , 并且这个伴随满足定理 7.4.7 的条件 3a) 与 3b). 其中结论 2 还把相应的单子写成了显式形式.

对图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{-1} & \xrightarrow{U} & \mathcal{D}^{-1} \\ & \searrow G & \swarrow G' \\ & \mathcal{C}^0 & \end{array}$$

使用推论 7.6.3, 问题便归结为证明典范自然变换 $G'F' \Rightarrow GF$ 是等价. 定理 8.2.2 把这两个函子都等同于复合

$$\mathcal{C}^0 \xrightarrow{d^{1*}} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d_{\sharp}^0} \mathcal{C}^0,$$

所以这个自然变换确实是等价. $\square$

注记 8.2.4. 对图表逐项取反范畴, 就得到推论 8.2.3 的对偶版本. 更明确地说, 要同步交换“左可伴随”与“右可伴随”、“单纯”与“余单纯”, 以及“几何实现”与“整体化”; 结论中的“全忠实左伴随”也要相应地换成“全忠实右伴随”.

§ 8.3 应用: 导出范畴满足下降

这一节给出推论 8.2.3 的一个应用: Grothendieck Abel 范畴的导出范畴满足下降. 在进入主定理以前, 先固定一点记号, 并说明有界下导出范畴的函子性.

记号 8.3.1. 令 $\mathcal{A}$ 为加性范畴. 用 $C^+(\mathcal{A})$ 表示 $C(\mathcal{A})$ 中由有界下复形 M^* 张成的全子范畴; 也就是说, 当 $n \ll 0$ 时有 $M^n \simeq 0$.

定义 8.3.2. 令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 并在无界导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 上取标准 t -结构 [Cnossen, 2025b, Proposition 4.5.6]. $\mathcal{A}$ 的下有界导出范畴定义为全子范畴

$$D^+(\mathcal{A}) := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} D(\mathcal{A})_{\leq m}.$$

换言之, $X \in D^+(\mathcal{A})$ 当且仅当 $H^n(X) \simeq 0$ 对所有充分小的 n 成立.

注记 8.3.3. 当 $\mathcal{A}$ 具有足够多内射对象时, 记 $\mathcal{A}_{\text{inj}}$ 为内射对象张成的全子范畴. 内射消解给出计算上述范畴的具体呈现

$$D^+(\mathcal{A}) \simeq K^+(\mathcal{A}_{\text{inj}}) = C^+(\mathcal{A}_{\text{inj}})[\text{HEq}^{-1}],$$

其中 HEq 表示复形同伦等价. 在这里, 拟同构恰好就是复形同伦等价. 因而内射复形只是计算定义 8.3.2 的模型; 后面的论证只使用导出范畴的泛性质、 t -结构、伴随与极限.

为了证明导出范畴满足下降, 我们首先要说明 $\mathcal{A} \mapsto D^+(\mathcal{A})$ 在合适的意义下具有函子性. 回忆一下, 我们用 $\text{Cat}_{(1)}$ 表示 1-范畴所成的范畴.

引理 8.3.4. 令

$$\text{Cat}_{(1)}^{\text{AbI,ex}} \subseteq \text{Cat}_{(1)}$$

为如下子范畴: 对象是具有足够多内射对象的 Abel 范畴, 态射是正合函子. 那么构造 $\mathcal{A} \mapsto D^+(\mathcal{A})$ 给出函子

$$D^+ : \text{Cat}_{(1)}^{\text{AbI,ex}} \longrightarrow \text{Cat}, \quad \mathcal{A} \longmapsto D^+(\mathcal{A}).$$

证明. 记 $\mathbf{Cat}^{\text{st}, \text{tex}}$ 为带 t -结构的稳定范畴所成的范畴, 其中各个 t -结构的心具有足够多内射对象, 而态射是 t -正合函子. 取心给出典范函子

$$(-)^{\heartsuit}: \mathbf{Cat}^{\text{st}, \text{tex}} \longrightarrow \mathbf{Cat}_{(1)}^{\text{AbI}, \text{ex}}, \quad \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}^{\heartsuit}.$$

令 $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Cat}^{\text{st}, \text{tex}}$ 为如下全子范畴: 它由所有等价于某个 $D^+(\mathcal{A})$ 的范畴张成, 其中 $\mathcal{A} \in \mathbf{Cat}_{(1)}^{\text{AbI}, \text{ex}}$. 由导出范畴的泛性质 [Lurie, 2017, Theorem 1.3.3.2], $(-)^{\heartsuit}$ 在 $\mathcal{X}$ 上的限制是全忠实的. 另一方面, 对每个 $\mathcal{A} \in \mathbf{Cat}_{(1)}^{\text{AbI}, \text{ex}}$, 都有 $D^+(\mathcal{A}) \in \mathcal{X}$ 且 $D^+(\mathcal{A})^{\heartsuit} \simeq \mathcal{A}$, 所以这个限制还是本质满的, 因而是等价. 它的逆函子正是这里所需的 D^+ . $\square$

回忆一下, 对每个具有足够多内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, [Lurie, 2017, Proposition 1.3.2.19] 说明标准 t -结构限制为 $D^+(\mathcal{A})$ 上的典范 t -结构 $(D^+(\mathcal{A})^{\leq 0}, D^+(\mathcal{A})^{\geq 0})$, 其中:

- $D^+(\mathcal{A})^{\leq 0}$ 由满足 $H^n(M) \simeq 0$ ($n > 0$) 的复形 M^* 张成;
- $D^+(\mathcal{A})^{\geq 0}$ 由满足 $H^n(M) \simeq 0$ ($n < 0$) 的复形 M^* 张成.

现在可以陈述本节的主定理.

定理 8.3.5. (Mann) 令 $\mathcal{A}^\bullet$ 为 $\mathbf{Cat}_{(1)}$ 中的余单纯对象, 并设

$$\mathcal{A} := \varprojlim_{n \in \Delta} \mathcal{A}^n$$

是它在 $\mathbf{Cat}$ 中的极限. 假设:

1. 每个 $\mathcal{A}^n$ 都是 *Grothendieck Abel* 范畴.
2. 对 Δ 中每个态射 $\alpha: [n] \rightarrow [m]$, 转移函子 $\alpha^*: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^m$ 都是正合的, 并且具有右伴随 α_* .
3. 对 Δ 中每个态射 $\alpha: [n] \rightarrow [m]$, 令 $\alpha' = \text{id}_{[0]} \star \alpha$. 则方块

$$\begin{array}{ccc} D^+(\mathcal{A}^n) & \xrightarrow{d^{0*}} & D^+(\mathcal{A}^{n+1}) \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha'^* \\ D^+(\mathcal{A}^m) & \xrightarrow{d^{0*}} & D^+(\mathcal{A}^{m+1}) \end{array}$$

右可伴随. 等价地, 相应的 *Beck–Chevalley* 伴随变换

$$\alpha^* \circ R d_*^0 \xrightarrow{\sim} R d_*^0 \circ \alpha'^*$$

是等价.

那么:

a) 范畴 $\mathcal{A}$ 是 *Grothendieck Abel* 范畴, 并且可以显式描述如下. $\mathcal{A}$ 中的对象是二元组 (X, α) , 其中 $X \in \mathcal{A}^0$, 而

$$\alpha: d^{0*}X \xrightarrow{\sim} d^{1*}X$$

是 $\mathcal{A}^1$ 中的同构, 并使 $\mathcal{A}^2$ 中的图表

$$\begin{array}{ccccc} & & d^{0*}d^{1*}X & \xlongequal{\quad} & d^{2*}d^{0*}X \\ & \nearrow d^{0*}\alpha & & & \searrow d^{2*}\alpha \\ d^{0*}d^{0*}X & & & & d^{2*}d^{1*}X \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & d^{1*}d^{0*}X & \xrightarrow{d^{1*}\alpha} & d^{1*}d^{1*}X & \end{array}$$

交换. $\mathcal{A}$ 中从 (X_1, α_1) 到 (X_2, α_2) 的态射, 是 $\mathcal{A}^0$ 中满足

$$d^{1*}f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ d^{0*}f$$

的态射 $f: X_1 \rightarrow X_2$.

b) 假设 $d^{1*}: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$ 把内射对象送到 d_*^0 -零调对象. 那么存在自然的范畴等价

$$D^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbb{A}} D^+(\mathcal{A}^n).$$

进一步, 如果 $D(\mathcal{A})$ 与所有 $D(\mathcal{A}^n)$ 都是左完备的, 那么由 [Lurie, 2017, Remark 1.2.1.18], 上面的等价可以延拓成

$$D(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbb{A}} D(\mathcal{A}^n).$$

证明. a) 范畴 $\text{Cat}_{(1)}$ 是一个 $(2, 1)$ -范畴. 由 [Lurie, 2017, Lemma 1.3.3.10], 有等价

$$\mathcal{A} \simeq \varprojlim_{n \in \mathbb{A} \leq 2} \mathcal{A}^n.$$

因而只看 0、1、2 三层就得到上面对 $\mathcal{A}$ 的显式描述, 同时也看出 $\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴.

各个转移函子都是正合函子并且具有右伴随, 所以它们也保持余极限. 因此 $\mathcal{A}$ 满足 AB5: 余极限存在, 而且滤过余极限正合. 由 [BEKE, 2000, Proposition 3.10], *Grothendieck Abel* 范畴恰好是可表现的 AB5 *Abel* 范畴. 另一方面, Pr^{L} 具有小极限, 并且嵌入 $\text{Pr}^{\text{L}} \subseteq \text{Cat}$ 保持小极限 [Lurie, 2009b, Proposition 5.5.3.13]. 所以 $\mathcal{A}$ 是可表现的, 从而是 *Grothendieck Abel* 范畴.

b) 由引理 8.3.4, 把 $\mathcal{A}^{-1}$ 定义成 $\mathcal{A}$ 以后, 得到增广余单纯对象

$$D^+(\mathcal{A}^\bullet): \mathbb{A}_+ = \mathbb{A}^{\triangleleft} \longrightarrow \text{Cat}.$$

记增广余面函子为

$$F := d^{0*}: D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A}^0).$$

先处理含有增广项的 Beck–Chevalley 条件. 条件 2 保证所需的右伴随存在; 对上述右可伴随方块的伴随变换在心中的对象上取 H^0 , 就得到 Abel 范畴层面的 Beck–Chevalley 伴随变换. 再把定理 8.2.2 用于 $(\mathcal{A}^\bullet)^{\text{op}}$, 可知正合函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0$ 具有右伴随 F_* . 若用 $d_*^0: \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^0$ 表示 $d^{0*}: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$ 的右伴随, 那么有典范同构

$$F \circ F_* \xrightarrow{\sim} d_*^0 \circ d^{1*}$$

作为 $\mathcal{A}^0$ 上的自函子.

现在使用定理第二项中的附加假设: d^{1*} 把内射对象送到 d_*^0 -零调对象. 上面的 Beck–Chevalley 伴随变换于是可以提升到有界下导出范畴, 得到

$$F \circ R F_* \xrightarrow{\sim} R d_*^0 \circ d^{1*}$$

作为 $D^+(\mathcal{A}^0)$ 上自函子之间的等价.

根据注记 8.2.4, 只需验证 $D^+(\mathcal{A}^\bullet)$ 满足推论 8.2.3 的对偶条件. 我们分三步来做.

(i) 函子 $F: D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A}^0)$ 是保守的.

事实上, 等价可以逐个上同调对象检查, 而 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0$ 由极限的显式描述可知是保守的.

(ii) $D^+(\mathcal{A})$ 具有 F -分裂余单纯对象的整体化, 并且这些整体化由 F 保持.

令 $X^\bullet$ 为 $D^+(\mathcal{A})$ 中的 F -分裂余单纯对象. 由 [Lurie, 2018a, Tag 04RE], 包含 $\Delta_{\text{inj}} \subseteq \Delta$ 是共首函子, 所以只需研究 $X^\bullet$ 底层的半余单纯对象.

我们用 [Lurie, 2017, Corollary 1.2.4.12] 的对偶版本来证明整体化存在¹. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 考虑 $H^n X^\bullet$ 所对应的未正规化余链复形

$$0 \longrightarrow K(n) \longrightarrow H^n X^0 \xrightarrow{\partial^1} H^n X^1 \longrightarrow H^n X^2 \longrightarrow \cdots, \quad (8.1)$$

其中 $K(n) := \ker(\partial^1)$.

函子 F 是正合的, 所以 $F(K(n))$ 仍然是 $H^n(FX^0) \rightarrow H^n(FX^1)$ 的核. 又因为 $FX^\bullet$ 按假设是分裂的, 对式 (8.1) 逐项作用 F 后得到分裂正合复形. F 是保守函子, 因此式 (8.1) 本身对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都正合.

现在使用 [Lurie, 2017, Corollary 1.2.4.12] 的对偶版本, 可知整体化存在. 记

$$X := \text{Tot}(X^\bullet) = \varprojlim_{[k] \in \Delta} X^k.$$

那么对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 态射 $X \rightarrow X^0$ 都诱导同构

$$H^n(X) \xrightarrow{\sim} K(n).$$

¹[Lurie, 2017, Corollary 1.2.4.12] 的陈述中有一处笔误: 相应条件需要对所有 $q \in \mathbb{Z}$ 验证, 而不只是 $q \geq 0$.

同样的论证用于 $FX^\bullet$, 说明 $\mathrm{Tot}(FX^\bullet)$ 存在, 并且

$$H^n(\mathrm{Tot}(FX^\bullet)) \xrightarrow{\sim} F(K(n)).$$

因而典范比较态射

$$F(X) \longrightarrow \mathrm{Tot}(FX^\bullet)$$

在每个上同调对象上都诱导同构

$$H^n(FX) \simeq F(H^n X) \simeq F(K(n)) \simeq H^n(\mathrm{Tot}(FX^\bullet)).$$

所以这个比较态射是等价, 即 F 保持上述整体化.

(iii) 对 Δ_+ 中每个态射 $\alpha: [n] \rightarrow [m]$, 相应方块都是右可伴随的.

当 $n, m \geq 0$ 时, 这正是条件 3. 含有 $[-1]$ 的基本情形由前面构造的等价 $F R F_* \simeq R d_*^0 d^{1*}$ 给出; 一般情形则由态射分解以及 Beck–Chevalley 伴随变换对复合的相容性得到. 具体地, 在非增广部分我们使用的方块是

$$\begin{array}{ccc} D^+(\mathcal{A}^n) & \xrightarrow{d^{0*}} & D^+(\mathcal{A}^{n+1}) \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha'^* \\ D^+(\mathcal{A}^m) & \xrightarrow{d^{0*}} & D^+(\mathcal{A}^{m+1}), \end{array}$$

它的右可伴随性就是相应 Beck–Chevalley 伴随变换为等价.

对偶形式的推论 8.2.3 现在说明典范函子

$$\theta: D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \varprojlim_{n \in \Delta} D^+(\mathcal{A}^n)$$

具有全忠实的右伴随. 又因为 F 是保守函子, 同一个推论进一步说明 θ 是等价.

最后, 如果 $D(\mathcal{A})$ 与所有 $D(\mathcal{A}^n)$ 都左完备, 就可以对上面的有界下等价取左完备化, 得到无界导出范畴之间的等价.

□

这一章的输出可以概括成一句话: 只要伴随和 Beck–Chevalley 变换相容, 就能把一个余单纯图表的整体化还原成第零项上的单子或余单子资料. 下一章会把静态交换环换成交换环谱, 把普通张量积换成谱意义下的相对张量积; 证明的骨架不变, 真正新增的条件是“可下降性”, 它保证基变换既保守, 又保持 Barr–Beck 所需的分裂整体化.

第9章

交换环谱的下降理论

在第8章中, 我们介绍了 Lurie–Beck–Chevalley 下降 (推论 8.2.3), 还说明了在适当的条件下, Grothendieck 阿贝尔范畴的导出范畴满足下降 (定理 8.3.5) .

本章一开始会先回顾 $\mathbb{E}_k$ -环 (谱) 的概念. 随后我们会看到, 静态交换环所成的范畴 $\mathbf{CRing}^{\text{static}}$ 可以看成交换环谱范畴 $\mathbf{CAlg}$ 的一个全子范畴. 对任意静态交换环 R , 还有一个典范的范畴等价

$$\mathbf{D}(R) \simeq \mathbf{Mod}(R),$$

其中 $\mathbf{Mod}(R)$ 是 R -模谱所成的范畴 (我们会借助定理 9.1.5, 把这里的静态交换环 R 看成交换环谱) .

设 $f: A \rightarrow B$ 是静态交换环之间的同态. 若相应余单纯模范畴满足定理 8.3.5 的条件 (典型情形是 f 忠实平坦), 那么在 $\mathbf{Cat}$ 中, $\mathbf{Mod}(A)$ 可以由余单纯对象 $\mathbf{D}(B^\bullet) \simeq \mathbf{Mod}(B^\bullet)$ 的整体化恢复出来; 这里 B^n 表示 $n+1$ 份 B 在 A 上的张量积.

不过实际使用时, 我们想讨论的是任意交换环谱态射 $A \rightarrow B$ 的下降理论; 这里的 A 与 B 未必来自静态交换环.

全章的路线是: 先固定 $\mathbb{E}_k$ -环谱、模谱与变环的记号, 再在稳定对称幺半范畴中定义可下降代数, 最后把上一章的余单子性判别用于基变换. 读到余杠构造时要始终记住, 它是余单纯对象, 因而最后取的是整体化而不是几何实现.

§ 9.1 $\mathbb{E}_k$ -环谱

注记 9.1.1. 本节不会把所有证明都写出来, 细节可以参见 [Lurie, 2017, § 7.1].

定义 9.1.2. 设 $\mathbf{Sp}$ 是谱所成的范畴, 并配上谱的张量积 (§ 5.8.3) . 一个 $\mathbb{E}_k$ -环谱, 就是 $\mathbf{Sp}$ 中的 $\mathbb{E}_k$ -代数. 我们用 $\mathbf{Alg}^{(k)}$ 表示 $\mathbb{E}_k$ -环谱所成的范畴 $\mathbf{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathbf{Sp})$.

依照注记 5.7.4, 只在 $k = \infty$ 这个特例里, 我们约定把 $\mathbb{E}_\infty$ 理解为交换模式 $\mathbf{Comm}$, 并用 $\mathbf{CAlg}$ 表示范畴 $\mathbf{CAlg}(\mathbf{Sp})$. 我们也把 $\mathbb{E}_\infty$ -环谱称为交换环谱.

注记 9.1.3. 由注记 5.7.4, 态射列

$$\mathbb{E}_0 \rightarrow \mathbb{E}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{E}_\infty = \text{Comm}$$

诱导出遗忘函子

$$\text{CAlg} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Alg}^{(2)} \rightarrow \text{Alg}^{(1)} \rightarrow \text{Alg}^{(0)}.$$

本章主要关心交换环谱.

定义 9.1.4. 设 R 是一个 $\mathbb{E}_1$ -环谱. 我们记 $\text{LMod}(R) := \text{LMod}_R(\text{Sp})$, 其中右边采用定义 5.4.16 的含义, 并把 $\text{LMod}(R)$ 称为左 R -模谱所成的范畴.

由命题 A.2.1, 若 R 还是交换环谱, 那么有一个典范等价

$$\text{LMod}(R) \simeq \text{Mod}(R).$$

这里 $\text{Mod}(R)$ 是如下拉回:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Mod}(\text{Sp}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \xrightarrow{R} & \text{CAlg} \end{array}$$

9.1.1 从静态交换环到交换环谱

现在我们来说明, 怎样把一个静态交换环看成交换环谱.

回忆 Dold-Kan 对应 ([Lurie, 2018a, Tag 00QQ]) 诱导出 Eilenberg-MacLane 函子 ([Lurie, 2018a, Tag 00QX])

$$D_{\geq 0}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ani}.$$

它是右伴随, 因而保持极限. 所以我们可以把它提升成函子

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp}(D_{\geq 0}(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\text{Sp}(K)} & \text{Sp}(\text{Ani}) \\ \parallel & & \parallel \\ D(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{H} & \text{Sp}. \end{array}$$

我们把 H 称为 Eilenberg-MacLane 谱函子.

定理 9.1.5. Eilenberg-MacLane 谱函子 $H: D(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Sp}$ 可以细化成一个松对称幺半函子 (也就是定义 5.4.5 中的松 Comm-幺半函子)

$$H: D(\mathbb{Z})^{\otimes_{\mathbb{Z}}} \rightarrow \text{Sp}.$$

更一般地, 对任意静态交换环 R , 函子 $C_*(-) \otimes_{\mathbb{Z}}^L R: \text{Sp} \rightarrow D(R)$ 有一个右伴随 $H: D(R) \rightarrow \text{Sp}$, 而且这个右伴随可以细化成松对称幺半函子

$$H: D(R)^{\otimes_R^L} \rightarrow \text{Sp}.$$

推论 9.1.6. 上面的构造诱导出一个完全忠实函子 $\mathbf{CRing}^{\text{static}} \rightarrow \mathbf{CAlg}$, 其本质像恰好由满足下列条件的 $R \in \mathbf{CAlg}$ 构成: 对所有 $i \neq 0$, 都有 $\pi_i(R) = 0$.

9.1.2 Morita 理论

这一节来介绍高阶代数中的 Morita 理论. 它会给出一个非常实用的稳定范畴识别判据.

构造 9.1.7. 设 $\mathcal{C}$ 是稳定范畴. 对 $X, Y \in \mathcal{C}$, 定义

$$\text{map}(X, Y)_n := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[n]).$$

注意, 当 $n \geq 0$ 时有等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[n]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega Y[n+1]) \simeq \Omega \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[n+1])$$

因而 $\text{map}(X, Y) \in \mathbf{Sp}$. 我们把它称为映射谱.

定义 9.1.8. 设 $\mathcal{C}$ 是稳定范畴. 对 $X, Y \in \mathcal{C}$, 定义

$$\text{Ext}^n(X, Y) := \pi_0 \text{map}(X, Y)_n \simeq \pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[n]),$$

并把它称为 X 与 Y 之间的第 n 个扩张群.

定理 9.1.9. (Schwede–Shipley) 设 $\mathcal{C}$ 是稳定范畴. 那么, $\mathcal{C}$ 等价于某个 $\mathbb{E}_1$ -环谱 R 的左模范畴 $\mathbf{LMod}(R)$, 当且仅当 $\mathcal{C}$ 可表现, 并且存在一个紧对象 $C \in \mathcal{C}$ 按照下面的意义生成 $\mathcal{C}$: 若对象 $D \in \mathcal{C}$ 满足对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\text{Ext}^n(C, D) \simeq 0$, 那么 $D \simeq 0$.

证明. • 先设 $\mathcal{C} \simeq \mathbf{LMod}(R)$, 并令 $C = R$ (把 R 看成它自身的左模). 这时 $\mathcal{C}$ 可表现, C 是 $\mathcal{C}$ 中的紧对象, 而且对每个 $D \in \mathcal{C}$ 都有 $\text{Ext}^n(C, D) \simeq H^n D$. 因此, $D \simeq 0$ 当且仅当对所有整数 n 都有 $\text{Ext}^n(C, D) \simeq 0$, 也就是说 C 生成 $\mathcal{C}$.

- 反过来, 设 $\mathcal{C}$ 可表现, 而 $C \in \mathcal{C}$ 是一个紧生成元. 于是 $C \in \mathbf{Pr}_{\text{st}}^{\mathbf{L}}$. 再由命题 5.8.11, 可以把 $\mathcal{C}$ 看成 $\mathbf{Sp}$ 上的模; 换句话说, $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{Sp}$ -线性的.

我们打算应用命题 A.1.4 来证明所需等价. 因此只需逐条验证命题 A.1.4 的条件:

1. 因为 $\mathcal{C}$ 可表现, 所以它有单纯对象的几何实现.
2. 按照 Lurie 张量积的定义, 作用函子 $\mathbf{Sp} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 保持余极限, 因而也保持单纯对象的几何实现.
3. 由伴随函子定理 ([Lurie, 2009b, Corollary 5.5.2.9]) 和上面的讨论, 函子 $- \otimes C: \mathbf{Sp} \rightarrow \mathcal{C}$ 有右伴随, 它正是映射谱函子 $\text{map}(C, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sp}$.
4. 因为 $\mathbf{Sp}$ 与 $\mathcal{C}$ 都稳定, $\text{map}(C, -)$ 是正合函子. 又因为 C 是紧对象, 由构造 9.1.7, $\text{map}(C, -)$ 与滤过余极限可交换, 因而保持小余极限.

5. 设 $\alpha: D \rightarrow D'$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射, 并且 $\text{map}(C, D \xrightarrow{\alpha} D')$ 是等价. 令 D'' 为 α 的纤维, 则 $\text{map}(C, D'') \simeq 0$, 从而对每个整数 n , $\text{Ext}^n(C, D'') \simeq \pi_0 \text{map}(C, D'')_n$ 都消失. 因此 $D'' \simeq 0$, 也就得到 α 是等价.
6. 最后只需说明: 对每个 $X \in \mathbf{Sp}$ 与 $D \in \mathcal{C}$, 都有等价 $X \otimes \text{map}(C, D) \simeq \text{map}(C, X \otimes D)$.

令 $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Sp}$ 是由满足 $X \otimes \text{map}(C, D) \simeq \text{map}(C, X \otimes D)$ 的那些谱 X 张成的全子范畴. 由于 $\mathbf{Sp}$ 由球谱 $\mathbb{S}$ 在余极限下生成, 我们只需证明 $\mathcal{X}$ 对余极限封闭且 $\mathbb{S} \in \mathcal{X}$. 前者来自 $\text{map}(C, -)$ 保持余极限; 后者则来自 $\mathbb{S}$ 是谱的张量积单位元.

□

事实上, 我们还能得到下面这个很有力的结论.

推论 9.1.10. 设 $1 \leq k \leq \infty$. 构造 $R \mapsto \mathbf{RMod}_R^{\otimes}$ 给出完全忠实嵌入

$$\mathbf{Alg}^{(k)} \hookrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{E}_{k-1}}(\mathbf{Pr}^{\mathbf{L}})$$

从而把 $\mathbb{E}_k$ -环谱恢复为带紧生成单位的 $\mathbb{E}_{k-1}$ -么半可表现范畴; 当 $k = \infty$ 时, 这里的 $\mathbb{E}_{k-1}$ 仍按 $\mathbb{E}_{\infty}$ 理解. 一个 $\mathbb{E}_{k-1}$ -么半范畴 $\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathbb{E}_{k-1}$ 属于这个嵌入的本质像, 当且仅当满足以下条件:

- $\mathcal{C}$ 稳定且可表现; 若 $k > 1$, 则张量积函子 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 分别关于每个变量保持小余极限.
- 单位对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 是紧的.
- 单位对象 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 按照下面的意义生成 $\mathcal{C}$: 若 $C \in \mathcal{C}$ 满足对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $\text{Ext}^i(\mathbb{1}, C) \simeq 0$, 那么 $C \simeq 0$.

现在可以把静态交换环 R 上的左模谱范畴识别成 R 的导出范畴.

推论 9.1.11. 设 R 是静态交换环. 那么典范函子

$$\mathbf{D}(R) \simeq \mathbf{LMod}_{R[0]}(\mathbf{D}(R)) \xrightarrow{H} \mathbf{LMod}(R) \simeq \mathbf{Mod}(R)$$

是等价.

9.1.3 交换环上的代数

设 $\mathcal{C}$ 是对称么半范畴, $R \in \mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的交换代数对象. 在一些温和的假设下, $\mathcal{C}$ 中 R -模所成的范畴 $\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C})$ 会继承对称么半结构, 而遗忘函子 $\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 是松对称么半的. 因而, 每个结合代数 $A \in \mathbf{Alg}(\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}))$ 都有一个底层结合代数 $A' \in \mathbf{Alg}(\mathcal{C})$; 真正的变环结论是, 两种方式得到的 A -模范畴彼此等价. 下面给出带 $\mathbb{E}_k$ -结构的版本.

定理 9.1.12. 设 $k \geq 1$, 而 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{E}_{k+1}$ -么半范畴. 假设 $\mathcal{C}$ 有单纯对象的几何实现, 并且张量积函子 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 分别关于每个变量保持几何实现.

设 $R \in \text{Alg}_{/\mathbb{E}_{k+1}}(\mathcal{C})$ 是一个 $\mathbb{E}_{k+1}$ -代数, 因而 $\text{LMod}_R(\mathcal{C})$ 继承 $\mathbb{E}_k$ -么半结构. 对任意

$$A \in \text{Alg}_{/\mathbb{E}_k}(\text{LMod}_R(\mathcal{C})),$$

设它在遗忘函子下的像为

$$A_0 \in \text{Alg}_{\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{k+1}}(\mathcal{C}).$$

这里保留相对算畴 $\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{k+1}$ 的层级很重要: 它记录了 A_0 的 $\mathbb{E}_k$ -代数结构是相对于 $\mathcal{C}$ 的 $\mathbb{E}_{k+1}$ -么半结构来理解的; 若只写成 $\text{Alg}_{/\mathbb{E}_k}(\mathcal{C})$, 这一层结构来源就被遮蔽了. 记底层遗忘函子为

$$\theta: \text{LMod}_R(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}.$$

它诱导函子

$$\theta_L: \text{LMod}_A(\text{LMod}_R(\mathcal{C})) \longrightarrow \text{LMod}_{A_0}(\mathcal{C}),$$

而 θ_L 是范畴等价, 并且与相应的 $\mathbb{E}_{k-1}$ -么半结构相容.

此外, 令

$$\theta_R: \text{RMod}_A(\text{LMod}_R(\mathcal{C})) \longrightarrow \text{RMod}_{A_0}(\mathcal{C})$$

为同一个底层遗忘函子在右模上诱导的函子. 若

$$M \in \text{RMod}_A(\text{LMod}_R(\mathcal{C})), \quad N \in \text{LMod}_A(\text{LMod}_R(\mathcal{C})),$$

那么典范态射

$$\theta_R(M) \otimes_{A_0} \theta_L(N) \rightarrow \theta(M \otimes_A N)$$

是 $\mathcal{C}$ 中的等价.

证明. 见 [Lurie, 2017, Theorem 7.1.3.1、Proposition 7.1.3.3 与 Corollary 7.1.3.4]. $\square$

§ 9.2 可下降对象

这一节中, 我们来构造交换环谱态射的下降理论¹. 更多讨论可参见 [Mathew, 2016].

若无特别说明, 本节中的 $\mathcal{C}$ 总表示一个可表现、稳定的对称么半范畴, 并且张量积函子 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 分别关于每个变量保持余极限. 这组内在条件通常称为一个稳定同伦理论; 后面的论证只使用稳定性、张量积与 (余) 极限的泛性质.

¹事实上, 对 $\mathbb{E}_2$ -环的态射也可以构造下降理论.

定义 9.2.1. 对每个对象 $A \in \mathcal{C}$, 记 $\langle A \rangle \subseteq \mathcal{C}$ 为 A 生成的厚张量理想: 它是包含 A 、对有限(余)极限与收缩项封闭, 并且满足

$$N \in \langle A \rangle, X \in \mathcal{C} \implies X \otimes N \in \langle A \rangle$$

的最小全子范畴. 若 $\langle A \rangle$ 包含单位对象 $1_{\mathcal{C}}$ (等价地, $\langle A \rangle = \mathcal{C}$), 我们就称 A 是可下降的.

这个定义不要求先把 $\mathcal{C}$ 选成某个具体模型. 若 $\mathcal{C}$ 的单位对象还是紧生成元, 推论 9.1.10 才会进一步把它识别为某个交换环谱 R 的模谱范畴. 在典型例子 $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$ 中, 交换代数 $A \in \text{CAlg}(\mathcal{C})$ 对应一个交换 R -代数 R' , 而定理 9.1.12 给出 $\text{Mod}_A(\mathcal{C}) \simeq \text{Mod}(R')$.

命题 9.2.2. 设 $A \in \text{CAlg}(\mathcal{C})$ 是可下降的交换代数. 若 $M \in \mathcal{C}$ 满足 $M \otimes A \simeq 0$, 那么 $M \simeq 0$.

证明. 令 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ 为由满足 $M \otimes N \simeq 0$ 的对象 $N \in \mathcal{C}$ 张成的全子范畴. 不难发现, $\mathcal{X}$ 是厚张量理想. 由于 $A \in \mathcal{X}$, 我们有 $\langle A \rangle \subseteq \mathcal{X}$. 可下降性说明 $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{X}$, 所以 $M \simeq M \otimes 1_{\mathcal{C}} \simeq 0$. $\square$

本节的目标是证明: 对任意可下降的交换代数 $A \in \text{CAlg}(\mathcal{C})$, 伴随

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \text{Mod}_A(\mathcal{C}) \\ & \perp & \\ & \text{Forget} & \end{array}$$

中的扩张标量函子 $- \otimes A$ 是余单子性的. 按定义 7.4.6, 这里的余单子作用在右侧范畴 $\text{Mod}_A(\mathcal{C})$ 上, 而比较函子从 $\mathcal{C}$ 指向它的余模范畴.

更一般地, 对结合代数 $A \in \text{Alg}(\mathcal{C})$, 可以在 $\mathcal{C}$ 中构造余单纯对象

$$A \rightrightarrows A \otimes A \rightrightarrows \cdots$$

其中余面态射插入单位, 余退化态射则把相邻因子相乘. 我们把它称为 A 的余杠构造, 并记作 $\text{CB}^\bullet(A)$. 若 A 是交换代数, 这个图表还会自然提升到 $\text{CAlg}(\mathcal{C})$.

还可以把 $\text{CB}^\bullet(A)$ 扩充成增广余单纯对象

$$1_{\mathcal{C}} \longrightarrow A \rightrightarrows A \otimes A \rightrightarrows \cdots$$

并把它记作 $\text{CB}_{\text{aug}}^\bullet(A)$.

后面的讨论需要用到 Pro-完备化; 细节可以参见 [Lurie, 2018a, Tag 063J].

定义 9.2.3. 设 $\mathcal{C}$ 是有有限极限的范畴.

- 一个余滤过图 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 称为 *pro*-常值的, 如果把它看成 $\text{Pro}(\mathcal{C})$ 中的对象之后, 它落在典范函子 $\mathcal{C} \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$ 的本质像里.
- 一个余单纯对象 $X^\bullet: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ 称为 *pro*-常值的, 如果它的部分整体化塔

$$\{\text{Tot}_n(X^\bullet)\}_{n \geq 0}, \quad \text{Tot}_n(X^\bullet) := \varprojlim_{\Delta \leq n} X^\bullet,$$

作为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ 的图是 *pro*-常值的.

注记 9.2.4. 上面的定义只用了有限极限. 在本节的稳定情形下, [Lurie, 2017, Theorem 1.2.4.1] 的对偶版本还把它识别为稳定 Dold–Kan 对应下的标准塔. 展开以后就是

$$\mathrm{Tot}(X^\bullet|_{\Delta_{\leq n}}) \rightarrow \mathrm{Tot}(X^\bullet|_{\Delta_{\leq n-1}}) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Tot}(X^\bullet|_{\Delta_{\leq 1}}) \rightarrow \mathrm{Tot}(X^\bullet|_{\Delta_{\leq 0}}),$$

这与定义中的记号 $\mathrm{Tot}_n(X^\bullet)$ 一致.

很容易给出一个判别 pro-常值对象的准则.

命题 9.2.5. 设 $\mathcal{C}$ 是有有限极限的范畴. 一个余滤过图 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中定义了 pro-常值对象, 当且仅当下面两个条件成立:

1. F 在 $\mathcal{C}$ 中有极限.
2. 对任意保持有限极限的函子 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, F 的极限也由 G 保持.

证明. 一个方向只需取 $\mathcal{D} = \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$; 另一个方向则来自 Pro-完备化的泛性质. $\square$

我们来看几个有用的例子.

例 9.2.6. 由注记 7.2.4 的对偶版本, 分裂余单纯对象 $X^\bullet$ 是 pro-常值的.

例 9.2.7. 设 $X \in \mathcal{C}$, 而 $e: X \rightarrow X$ 是一个幂等自态射. 也就是说, $e^2 \simeq e$ 以同伦相容的方式成立; 这个条件也可以表成两元素么半群 $\{1, x\}$ 在 X 上有一个作用. 这时, 塔

$$\cdots \rightarrow X \xrightarrow{e} X \xrightarrow{e} X,$$

只要有极限, 就是 pro-常值的. 这是因为幂等元的像总给出一个万有极限.

注记 9.2.8. 设 $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 是 pro-常值的余滤过图. 那么对任意 $X \in \mathcal{C}$, 自然态射

$$\left(\varprojlim_{\mathcal{I}} F(i) \right) \otimes X \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{I}} (F(i) \otimes X)$$

是等价. 这里用到 $\mathcal{C}$ 稳定, 并且 $- \otimes X$ 保持余极限, 因而也保持有限极限; 所以可以把上面的 pro-常值判别法用于这个函子.

我们可以用 pro-常值对象来刻画可下降的交换代数 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$.

命题 9.2.9. 设 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 是交换代数. 那么 A 可下降, 当且仅当 $\mathrm{CB}^\bullet(A)$ 是 pro-常值对象, 并且 $\mathrm{CB}_{\mathrm{aug}}^\bullet(A)$ 是极限图.

证明. • 先设 A 可下降. 令 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ 为由下列对象 $M \in \mathcal{C}$ 张成的全子范畴: $\mathrm{CB}_{\mathrm{aug}}^\bullet(A) \otimes M$ 是极限图, 而且与之相伴、收敛到 M 的图定义了一个 pro-常值对象. 我们只需证明 $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{X}$.

注意 $A \in \mathcal{X}$. 再由注记 9.2.8, 不难验证 $\mathcal{X}$ 是厚张量理想. 因而 $\langle A \rangle \subseteq \mathcal{X}$.

- 反过来, 假设 $\mathrm{CB}_{\mathrm{aug}}^\bullet(A)$ 是极限图, 而 $\mathrm{CB}^\bullet(A)$ 是 pro-常值对象. 那么只要 $n \gg 0$, $\mathbb{1}_C$ 就是 $\mathrm{Tot}_n \mathrm{CB}^\bullet(A)$ 的收缩项. 另一方面, $\mathrm{Tot}_n \mathrm{CB}^\bullet(A) \in \langle A \rangle$. 因而 $\mathbb{1}_C \in \langle A \rangle$. $\square$

命题 9.2.9 说明, A 满足下降, 当且仅当 $\mathbb{1}$ 可以写成某个有限余极限的收缩项; 这里参与该有限图的每个对象都带有 A -模结构.

推论 9.2.10. 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 是保持有限余极限的对称么半函子. 给定 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$, 若 A 可下降, 那么 $F(A)$ 也可下降.

现在可以证明本节的主要定理了.

定理 9.2.11. 设 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 是可下降的交换代数. 那么伴随

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{-\otimes A} & \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) \\ & \downarrow \mathrm{Forget} & \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

中的扩张标量函子 $-\otimes A$ 是余单子性的. 特别地, 典范函子

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Tot}([n] \longmapsto \mathrm{Mod}_{A^{\otimes(n+1)}}(\mathcal{C}))$$

是等价.

证明. 只需验证推论 7.4.11 中的条件:

1. 保守性来自命题 9.2.2.
2. 设 $X^\bullet: \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个 $-\otimes A$ -分裂余单纯对象. 我们需要证明

$$A \otimes \mathrm{Tot}(X^\bullet) \rightarrow \mathrm{Tot}(A \otimes X^\bullet)$$

是等价, 同时还要知道相应整体化存在. 由 pro-常值判别法与注记 9.2.8, 只需说明 $X^\bullet$ 是 pro-常值的.

令 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ 为由满足 $M \otimes X^\bullet$ 是 pro-常值对象的那些 $M \in \mathcal{C}$ 张成的全子范畴. 与命题 9.2.9 的证明一样, $\mathcal{X}$ 是厚张量理想. 因为 $A \otimes X^\bullet$ 是分裂余单纯对象, 有 $A \in \mathcal{X}$; 再用 A 的可下降性, 得到 $\mathbb{1}_C \in \mathcal{X}$, 也就是 $X^\bullet$ 本身 pro-常值. $\square$

从相对的观点来看, 我们还可以定义可下降态射.

定义 9.2.12. 设 $A, B \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 是交换代数, 而 $A \rightarrow B$ 是 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 中的态射. 可以把 B 看成 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中的交换代数. 若 B 在 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中可下降, 我们就称 $A \rightarrow B$ 是可下降的.

这一节的最后, 我们来讨论可下降态射的几个性质.

命题 9.2.13. 设 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 是 $\text{CAlg}(\mathcal{C})$ 中的一列态射.

1. 若 $A \rightarrow B$ 与 $B \rightarrow C$ 都可下降, 那么 $A \rightarrow C$ 也可下降.
2. 若 $A \rightarrow C$ 可下降, 那么 $A \rightarrow B$ 也可下降.

证明. 1. 只需在 $\text{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中证明 $A \in \langle C \rangle$. 由于 $A \rightarrow B$ 可下降, 有 $A \in \langle B \rangle$; 又因为 $B \rightarrow C$ 可下降, 每个 B -模都属于 C 生成的厚张量理想. 特别地 $B \in \langle C \rangle$, 因而 $A \in \langle C \rangle$.

2. 若 $A \rightarrow C$ 可下降, 则 $A \in \langle C \rangle$. 每个 C -模当然也是 B -模, 而在 $\text{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中, B 生成的厚张量理想包含每个 B -模: 对 B -模 M , 作用与单位把 M 展示成 $B \otimes_A M$ 的收缩项. 所以 $C \in \langle B \rangle$, 进而 $A \in \langle B \rangle$.

□

命题 9.2.14. 设 K 是有限单纯集(这里只把它当作有限图表的形状), 而 $p: K \rightarrow \text{CAlg}(\text{Pr}_{\text{st}}^{\text{L}})$ 是一个图. 对 $A \in \text{CAlg}(\varprojlim_K p)$, A 可下降, 当且仅当对每个顶点 $k \in K$, 它在 $\text{CAlg}(p(k))$ 中的像都可下降.

证明. 见 [Mathew, 2016, Proposition 3.25].

□

9.2.1 用 Adams 塔刻画 pro-常值性

按照 [Mathew et al., 2017, § 2.1], 还可以用 Adams 塔来刻画 pro-常值性. 设 $A \in \text{Alg}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的结合代数.

构造 9.2.15. (Adams 塔) 给定对象 $M \in \mathcal{C}$, 可以在 $\mathcal{C}$ 中构造一座塔

$$\cdots \rightarrow T_2(A, M) \rightarrow T_1(A, M) \rightarrow T_0(A, M) \simeq M$$

具体如下:

1. $T_1(A, M)$ 是由 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow A$ 诱导的态射 $M \rightarrow A \otimes M$ 的纤维, 因而 $T_1(A, M)$ 自然带有一个到 M 的态射.
2. 更一般地, 定义 $T_i(A, M) := T_1(A, T_{i-1}(A, M))$, 它自然带有一个到 $T_{i-1}(A, M)$ 的态射.

归纳下去就得到了函子 T_i 以及所需的塔. 我们把它称为 M 的 A -Adams 塔.

注意, M 的 A -Adams 塔无非是 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ 的 A -Adams 塔与 M 的张量积.

注记 9.2.16. Adams 塔还可以换一种方式来写. 令 $I = \text{fib}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow A)$, 那么 I 是 $\mathcal{C}$ 中的无么结合代数 (注记 5.2.5), 并且配有态射 $I \rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. 事实上, 可以得到一座塔

$$\cdots \rightarrow I^{\otimes n} \rightarrow I^{\otimes(n-1)} \rightarrow \cdots \rightarrow I^{\otimes 2} \rightarrow I \rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}},$$

它恰好就是 $\mathbb{1}_C$ 的 A -Adams 塔 $\{T_i(A, \mathbb{1}_C)\}_{i \geq 0}$. 再与 M 作张量积, 就得到 M 的 A -Adams 塔.

下面是一个简单的 Adams 塔例子.

例 9.2.17. 把静态环 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}/p$ 经 H 看成交换环谱, 并令 $C = \text{Mod}(\mathbb{Z})$, $A = \mathbb{Z}/p$. 那么对对象 $M \in C$, Adams 塔 $\{T_i(\mathbb{Z}/p, M)\}$ 就是

$$\cdots \rightarrow M \xrightarrow{p} M \xrightarrow{p} M.$$

A -Adams 塔有下面两个基本性质:

命题 9.2.18. • 对每个 i , $\text{cofib}(T_i(A, M) \rightarrow T_{i-1}(A, M))$ 都带有 C 中的 A -模结构; 而每个态射 $T_i(A, M) \rightarrow T_{i-1}(A, M)$ 在与 A 作张量积之后都零伦.

- 假设 M 是 C 中的 A -模. 那么 Adams 塔中相继的态射 $T_i(A, M) \rightarrow T_{i-1}(A, M)$ 都零伦.

证明. • 因为 $T_i(A, M) \simeq T_1(A, T_{i-1}(A, M))$, 所有问题都归结到 $i = 1$ 的情形. 按照定义, $T_1(A, M) \rightarrow M$ 的余纤维正是 $A \otimes M$. 而在与 A 作张量积之后, $M \rightarrow A \otimes M$ 有一个截面. 因而 $T_1(A, M) \rightarrow M$ 在与 A 作张量积之后零伦.

- 现在设 M 是 C 中的 A -模. 这时有典范态射 $A \otimes M \rightarrow M$, 所以 $M \rightarrow A \otimes M$ 有一个截面, 从而 $T_i(A, M) \rightarrow T_{i-1}(A, M)$ 零伦.

□

从构造不难看出, A -Adams 塔是 C 中一个以 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\text{op}}$ 为指标的余滤过图. 我们想说明, 在稳定 Dold-Kan 对应 (注记 9.2.4) 之下, 它对应于 $\text{CB}^\bullet(A)$ 的部分整体化塔. 从稳定 Dold-Kan 对应的证明中, 可以直接读出一种办法.

定义 9.2.19. 设 $S \in \text{Fin}$ 是非空有限集.

- 用 $\mathcal{P}(S)$ 表示 S 的所有非空子集按包含关系组成的偏序集.
- 用 $\mathcal{P}^+(S)$ 表示 S 的所有子集按包含关系组成的偏序集.

熟悉稳定 Dold-Kan 对应证明的读者马上就能看出, $\mathcal{P}([n])$ 与 $\mathcal{J}^{\leq n}$ 一致, 而 $\mathcal{P}^+([n])$ 与 $\mathcal{J}^{+, \leq n}$ 一致.

构造 9.2.20. 假设对每个 $s \in S$ 都给定态射 $f_s: X_s \rightarrow Y_s$. 那么得到一个函子

$$F^+(\{f_s\}): \mathcal{P}^+(S) \rightarrow C$$

它在子集 $S' \subset S$ 上的取值是

$$F^+(\{f_s\})(S') = \bigotimes_{s_1 \notin S'} X_{s_1} \otimes \bigotimes_{s_2 \in S'} Y_{s_2}.$$

我们用 $F(\{f_s\}): \mathcal{P}(S) \rightarrow C$ 表示 $F^+(\{f_s\})$ 的限制.

事实 9.2.21. 设 S 是非空有限集, 那么有等价

$$\varprojlim_{\mathcal{P}(S)} F(\{f_s\}) \simeq \text{cofib} \left(\bigotimes_{s \in S} \text{fib}(X_s \rightarrow Y_s) \rightarrow \bigotimes_{s \in S} X_s \right).$$

利用这个事实, 可以得到下面的结论.

命题 9.2.22. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是结合代数, 那么有等价

$$\text{Tot}_n(\text{CB}^\bullet(A)) \simeq \text{cofib} \left(I^{\otimes(n+1)} \rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \right).$$

证明. 由 [Lurie, 2017, Lemma 1.2.4.17], 共首函子

$$\mathcal{P}([n]) \rightarrow \Delta^{\leq n}$$

是初始的. 因而 $\text{Tot}_n(\text{CB}^\bullet(A))$ 等价于相应的 $F(\{f_s\})$ 的极限, 其中对每个 $s \in [n]$, $f_s: \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow A$ 都是结合代数 A 的单位态射. 再使用事实 9.2.21 与注记 9.2.16, 就得到结论. $\square$

§ 9.3 R -线性范畴的下降

这一节来介绍 R -线性范畴的下降理论.

定义 9.3.1. 设 R 是交换环谱. 一个 R -线性范畴是指一个在 $\text{Mod}(R)$ 上线性的可表现范畴 $\mathcal{C}$, 并且作用函子

$$- \otimes_R -: \text{Mod}(R) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

分别关于每个变量保持余极限.

由于 $\text{Mod}(R)$ 本身是稳定的, 这样的模作用自动使 $\mathcal{C}$ 成为稳定范畴; 因而不需要再额外选择 dg 范畴或模型范畴的增强.

设 $(\text{Pr}^L)^\otimes$ 是 Pr^L 配上定义 5.8.3 中的 Lurie 张量积. 由命题 A.2.2, 可以把 $\text{Mod}(R)$ 看成 $(\text{Pr}^L)^\otimes$ 中的交换代数. 我们记 $\text{LinCat}_R = \text{Mod}_{\text{Mod}(R)}(\text{Pr}^L)$, 并把它称为 R -线性范畴所成的范畴.

例 9.3.2. 设 $\mathbb{S}$ 是球谱, 那么 Sp 是 $\mathbb{S}$ -线性范畴, 并且 $\text{LinCat}_{\mathbb{S}} = \text{Mod}_{\text{Sp}}(\text{Pr}^L)$. 由 § 5.8.3 中的讨论, 还有 $\text{Mod}_{\text{Sp}} \simeq \text{Pr}_{\text{st}}^L$.

现在固定交换环谱 A 、一个 A -线性范畴 $\mathcal{C}$, 以及交换 A -代数 B . 可以考虑 $\mathcal{C}$ 内部的 B -模所成的范畴 $\text{Mod}_B(\mathcal{C})$, 也就是

$$\text{Mod}_B(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \otimes_{\text{Mod}(A)} \text{Mod}(B).$$

粗略来说, $\text{Mod}_B(\mathcal{C})$ 是函子

$$- \otimes_A -: \mathcal{C} \times \text{Mod}(B) \rightarrow \text{Mod}_B(\mathcal{C}), \quad (X, M) \mapsto X \otimes_A M.$$

的目标.

本节要讨论的问题是: 对任意稳定的 A -线性范畴 $\mathcal{C}$, 下降是否仍然成立?

由定理 9.2.11 的证明, 立刻得到:

推论 9.3.3. 设 $A \rightarrow B$ 是交换环谱之间的可下降态射. 那么对任意稳定的 A -线性范畴 $\mathcal{C}$, 由与 B 作张量积诱导的典范函子

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Tot} \left([n] \longmapsto \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Mod}(A)} \mathrm{Mod} \left(B^{\otimes_A (n+1)} \right) \right)$$

是等价.

证明. 留给读者. □

推论 9.3.4. 设 $f: A \rightarrow B$ 是交换环谱之间的可下降态射. 那么基变换函子 $\mathrm{Mod}(A) \rightarrow \mathrm{Mod}(B)$ 是余单子性的.

因此, 从静态忠实平坦下降到交换环谱下降, 形式上的骨架始终是同一个: Amitsur 余框图给出余单纯对象, Beck–Chevalley 与 Barr–Beck 把基变换解释成余单子性, 而可下降性则用一个有限的厚张量理想条件控制原本无限的整体化. 整个论证都发生在稳定范畴及其泛性质中.

第 A 章

高阶代数中的若干推论

这是一个随用随查的工具性附录, 不要求线性阅读. 第一节的纤维化与模范畴结论用于 Barr–Beck 定理及 Morita 型识别, 第二节的结论用于交换环谱的下降. 它们大多是文献中一般结果的直接应用, 因而这里只把假设和结论写清楚, 证明则指向相应出处; 正文在真正使用时会再次说明所需假设.

§ A.1 关于模的进一步结论

引理 A.1.1. 设给定推出纤维化 $\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{LM}$, 它展示 $\mathcal{M}^\otimes$ 是么半范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 上的线性范畴. 那么所诱导的结合型函子 $\mathcal{M}^\otimes \rightarrow \mathcal{C}^\otimes$ 是局部推出纤维化.

证明. 对每个 $n \geq 0$, 态射 $p_{[n]}: \mathcal{M}_{[n]}^\otimes \rightarrow \mathcal{C}_{[n]}^\otimes$ 等价于投影 $\mathcal{C}_{[n]}^\otimes \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}_{[n]}^\otimes$. 所需结论于是由 [Lurie, 2009b, Proposition 2.4.2.11] 得到. $\square$

引理 A.1.2. 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是么半范畴, $\mathcal{M}^\otimes$ 是 $\mathcal{C}^\otimes$ 上的线性范畴, 并记

$$\theta: \mathbf{LMod}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathcal{C})$$

为遗忘函子. 那么 θ 是拉回纤维化. 此外, $\mathbf{LMod}(\mathcal{M})$ 中的态射 f 是 θ -拉回的, 当且仅当 f 在 $\mathcal{M}$ 中的像是等价.

证明. 见 [Lurie, 2017, Corollary 4.2.3.2]. $\square$

命题 A.1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是么半范畴. 假定 $\mathcal{C}$ 具有单纯对象的几何实现, 并且张量积 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 关于每个变量都保持几何实现. 对任意结合代数 $A \in \mathbf{Alg}(\mathcal{C})$, 双模范畴 ${}_A \mathbf{BMod}_A(\mathcal{C})$ 上存在由 A 上的相对张量积给出的么半结构 (见定义 7.2.7).

证明. 见 [Lurie, 2017, Proposition 4.4.3.12]. $\square$

命题 A.1.4. 设 $\mathcal{C}$ 是幺半范畴. 假定 $\mathcal{C}$ 具有单纯对象的几何实现, 并且张量积 $-\otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 关于每个变量都保持几何实现. 再设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的线性范畴, $M \in \mathcal{M}$ 是一个对象.

存在结合代数 $A \in \text{Alg}(\mathcal{C})$ 以及 $\mathcal{C}$ -线性范畴的等价

$$\text{LMod}_A(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{M},$$

并且该等价把 A 送到 M , 当且仅当下列条件成立:

1. $\mathcal{M}$ 具有单纯对象的几何实现;
2. 作用函子 $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ 保持单纯对象的几何实现;
3. 由 $F(C) = C \otimes M$ 定义的函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ 具有右伴随 G ;
4. G 保持单纯对象的几何实现;
5. G 是保守函子;
6. 对每个 $N \in \mathcal{M}$ 和 $C \in \mathcal{C}$, 典范态射

$$F(C \otimes G(N)) \simeq C \otimes G(N) \otimes M \simeq C \otimes FG(N) \longrightarrow C \otimes N$$

在伴随下对应于等价 $C \otimes G(N) \xrightarrow{\sim} G(C \otimes N)$.

证明. 见 [Lurie, 2017, Proposition 4.8.5.8]. □

§ A.2 交换代数上的左模

考虑典范函子 $\Phi: \text{LM} \rightarrow \text{CM}$, 它由下列规则给出:

- 对 $n \geq 0$, 令 $\Phi([n], 0) = (\text{Cut}([n] \star [0]), n+1)$;
- 对 $n \geq 0$, 令 $\Phi([n], 1) = (\text{Cut}([n]), 0)$.

命题 A.2.1. 设 $\mathcal{O}$ 是算畴. 那么下列交换方块是拉回方块:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\Phi^*} & \text{LMod}(\mathcal{O}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{CAlg}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\text{Cut}^*} & \text{Alg}(\mathcal{O}). \end{array}$$

特别地, 对 $R \in \text{CAlg}(\mathcal{O})$ 记 $R' := \text{Cut}^* R$, 取竖直纤维后得到等价

$$\text{Mod}_R(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \text{LMod}_{R'}(\mathcal{O}).$$

证明. 见 [Lurie, 2017, Proposition 4.5.1.4]. □

Appendix A. 高阶代数中的若干推论

另一方面, 函子 $\text{Cut}: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Fin}_*$ 诱导代数模式之间的态射

$$f: \mathbf{BM} \longrightarrow \mathbf{CM}.$$

对于算畴 $\mathcal{O}$, 预复合给出拉回函子

$$f^*: \mathbf{Mod}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbf{BMod}(\mathcal{O}).$$

命题 A.2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是对称幺半范畴. 假定 $\mathcal{C}$ 具有单纯对象的几何实现, 并且张量积 $- \otimes -: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 关于每个变量都保持几何实现. 再设 R 是 $\mathcal{C}$ 中的交换代数. 那么:

- $\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C})$ 具有对称幺半结构;
- 由 f^* 诱导的函子 $\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}) \rightarrow {}_R\mathbf{BMod}_R(\mathcal{C})$ 可以提升为幺半函子.

特别地, $\mathbf{Mod}_R(\mathcal{C})$ 上的张量积由下列复合给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}) \times \mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}) &\longrightarrow {}_R\mathbf{BMod}_R(\mathcal{C}) \times {}_R\mathbf{BMod}_R(\mathcal{C}) \\ &\xrightarrow{- \otimes_R -} {}_R\mathbf{BMod}_R(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{LMod}_R(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_R(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

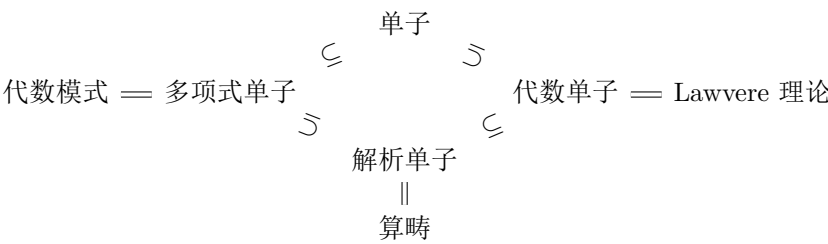
证明. 见 [Lurie, 2017, Theorem 4.5.2.1]. □

第 B 章

刻画代数结构的单子（未完成提纲）

警告 B.0.1. 本附录是尚未完成的探索提纲, 不属于正文的逻辑依赖, 目前也没有明确的补全计划. 下图中的等号与包含号只记录预期比较的工作草图; 在缺少定义、假设和证明的现状下, 它们不能作为本讲义已经建立的结论引用.

我们原本希望在合适的小性与可达性假设下, 比较下面几种编码代数结构的方式:



§ B.1 多项式单子

本节尚待补充定义、比较函子及其适用范围.

§ B.2 解析单子

本节尚待说明解析单子与算畴之间的对应所需的假设.

§ B.3 代数单子

本节尚待比较代数单子与 Lawvere 理论, 并核对它们与上图其余节点的关系.

Bibliography

- [Baez and Dolan, 1995] Baez, J. C. and Dolan, J. (1995). Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6073–6105.
- [Barkan et al., 2024] Barkan, S., Haugseng, R., and Steinebrunner, J. (2024). Envelopes for algebraic patterns.
- [BEKE, 2000] BEKE, T. (2000). Sheafifiable homotopy model categories. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 129(3):447–475.
- [Boardman and Vogt, 1973] Boardman, J. M. and Vogt, R. M. (1973). *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- [Bott and Tu, 1982] Bott, R. and Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer New York.
- [Cesnavicius and Scholze, 2024] Cesnavicius, K. and Scholze, P. (2024). Purity for flat cohomology.
- [Chu and Haugseng, 2021] Chu, H. and Haugseng, R. (2021). Homotopy-coherent algebra via segal conditions. *Advances in Mathematics*, 385:107733.
- [Cnossen, 2025a] Cnossen, B. (2025a). Introduction to higher algebra. <https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen/teaching/so25-introduction-to-higher-algebra>.
- [Cnossen, 2025b] Cnossen, B. (2025b). Introduction to stable homotopy theory(lecture course at university of regensburg). <https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen/introduction-to-stable-homotopy-theory>.
- [Cnossen et al., 2024] Cnossen, B., Haugseng, R., Lenz, T., and Linskens, S. (2024). Homotopical commutative rings and bispans.
- [Cohn, 2016] Cohn, L. (2016). Differential graded categories are k-linear stable infinity categories.

Bibliography

- [Davies and Tatum, 2024] Davies, J. and Tatum, L. (2024). Lecture notes for algebraic topology ii (stable and chromatic homotopy theory). https://www.dropbox.com/scl/fi/j73uavecb4gxkmb6uk80b/ATII_script.pdf?rlkey=2v7ezb2ie3bmu8rlig3kwq7qa&e=1&st=pu7m5wgm&dl=0.
- [Deligne et al., 1983] Deligne, P., Beilinson, A., and Bernstein, J. (1983). Faisceaux pervers. *Astérisque*, 100.
- [Eilenberg and MacLane, 1945] Eilenberg, S. and MacLane, S. (1945). Relations between homology and homotopy groups of spaces. *Annals of Mathematics*, 46(3):480–509.
- [Goerss and Hopkins, 2005] Goerss, P. and Hopkins, M. (2005). Moduli problems for structured ring spectra. *preprint*, 1086.
- [Groth, 2016] Groth, M. (2016). Characterizations of abstract stable homotopy theories. <https://arxiv.org/abs/1602.07632>.
- [Hatcher, 2002] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [Haugsgeng, 2023] Haugsgeng, R. (2023). An allegedly somewhat friendly introduction to ∞ -operads. <https://runegha.folk.ntnu.no/iopd.pdf>.
- [Haugsgeng, 2025] Haugsgeng, R. (2025). Yet another introduction to infinity-categories. https://runegha.folk.ntnu.no/naiveocat_web.pdf. Lecture notes for NTNU MA8403, Spring 2025.
- [Hebestreit, 2021] Hebestreit, F. (2021). Algebraic and hermitian k -theory. <https://florianadler.github.io/AlgebraBonn/KTheory.pdf>.
- [Heyer and Mann, 2024] Heyer, C. and Mann, L. (2024). 6-functor formalisms and smooth representations.
- [Kashiwara and Schapira, 2006] Kashiwara, M. and Schapira, P. (2006). *Categories and Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.
- [Krause et al., 2024] Krause, A., Nikolaus, T., and Pützstück, P. (2024). Sheaves on manifolds. <https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/sheaves-on-manifolds.pdf>.
- [Lurie, 2004] Lurie, J. (2004). *Derived Algebraic Geometry*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Available at <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG.pdf>.
- [Lurie, 2009a] Lurie, J. (2009a). Derived algebraic geometry v: Structured spaces.

Bibliography

- [Lurie, 2009b] Lurie, J. (2009b). *Higher Topos Theory (AM-170)*. Princeton University Press.
- [Lurie, 2017] Lurie, J. (2017). Higher algebra. <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- [Lurie, 2018a] Lurie, J. (2018a). Kerodon. <https://kerodon.net>.
- [Lurie, 2018b] Lurie, J. (2018b). Spectral algebraic geometry. <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf>.
- [Mathew, 2016] Mathew, A. (2016). The galois group of a stable homotopy theory.
- [Mathew et al., 2017] Mathew, A., Naumann, N., and Noel, J. (2017). Nilpotence and descent in equivariant stable homotopy theory. *Advances in Mathematics*, 305:994–1084.
- [Muro et al., 2007] Muro, F., Schwede, S., and Strickland, N. (2007). Triangulated categories without models. *Inventiones mathematicae*, 170(2):231–241.
- [Pstrągowski, 2022] Pstrągowski, P. (2022). Synthetic spectra and the cellular motivic category.
- [Pstrągowski, 2023] Pstrągowski, P. (2023). Moduli of spaces with prescribed homotopy groups.
- [Schlank and Yanovski, 2019] Schlank, T. and Yanovski, L. (2019). The ∞ -categorical eckmann-hilton argument. *Algebraic & Geometric Topology*, 19(6):3119–3170.
- [Scholze and Clausen, 2019] Scholze, P. and Clausen, D. (2019). Lectures on analytic geometry. <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>.
- [Tabuada, 2004] Tabuada, G. (2004). Une structure de categorie de modeles de quillen sur la categorie des dg-categories.
- [Winges, 2024] Wings, C. (2024). Localisation and devissage in algebraic k-theory. https://homepages.uni-regensburg.de/~wic42659/ws23_devissage.html.
- [Yanovski, 2021] Yanovski, L. (2021). The monadic tower for ∞ -categories.
- [Zheng, 2024] Zheng, W. (2024). Lectures on homological algebra. <https://server.mcm.ac.cn/~zheng/homalg.pdf>.
- [李文威, 2024] 李文威 (2024). 代数学方法 (第二卷)—线性代数. 高等教育出版社.
- [香蕉空间, 2021] 香蕉空间 (2021). 香蕉空间.